



Банк России

ОЦЕНКА СВЯЗИ БЕЗРАБОТИЦЫ И СПРОСА НА ПАНЕЛЬНЫХ ДАнных: УЧЕТ ПРОПУЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАКОНЕ ОУКЕНА

Серия докладов об экономических исследованиях

№ 165 / март 2026

А. Беяков, В. Грищенко, И. Приймак

Антон Беляков
Банк России, Департамент исследований и прогнозирования
E-mail: BelyakovA0@cbr.ru

Вадим Грищенко
Банк России, Департамент исследований и прогнозирования
E-mail: GrishchenkoV0@cbr.ru

Ирина Приймак
Московская школа экономики, МГУ имени М.В. Ломоносова
E-mail: priymak-irina032000@mail.ru

Авторы благодарны анонимному рецензенту, а также Зяблицкому И. и Ермакову С. за ценные замечания по работе.

Статьи, выходящие в серии докладов об экономических исследованиях, анонимно рецензируются членами Консультативного совета по экономическим исследованиям при Банке России и внешними рецензентами.

Содержание настоящего доклада по экономическим исследованиям отражает личную позицию авторов. Результаты исследования являются предварительными и публикуются с целью стимулировать обсуждение и получить комментарии для возможной дальнейшей доработки материалов. Содержание и результаты исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

Все права защищены. Воспроизведение представленных материалов допускается только с разрешения авторов.

107016, г. Москва, ул. Неглинная, 12, к. В
Официальный сайт Банка России: www.cbr.ru

© Центральный банк Российской Федерации, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
1.1. Описание содержания работы	6
2. Обзор литературы	6
2.1. Экономический смысл закона Оукена и механизмы рынка труда	6
2.2. Оценки коэффициентов Оукена для групп стран	8
2.3. Оценки коэффициентов Оукена для России	9
2.4. Асимметрия закона Оукена	10
3. Нелинейность закона Оукена в данных по России	11
3.1. Естественный и потенциальный темпы прироста ВВП	13
4. Теоретические обоснования	14
4.1. Связь уровня безработицы и количества занятых	15
4.2. Связь количества занятых со спросом	15
4.3. Динамика капитала и инвестиции	16
4.4. Естественный рост, потенциальный рост и реакция на шоки	17
4.5. Уравнение регрессии	18
5. Региональные панельные регрессии	18
5.1. Модели с пространственными эффектами	20
6. Страновые панельные регрессии	22
7. Заключение	26
Литература	29

Аннотация

Ряд исследователей отмечают асимметричность реакции безработицы на шоки спроса. Такая асимметрия может быть результатом нелинейности этой зависимости. В данной работе показывается, что нелинейность закона Оукена может быть объяснена пропуском важных демографических и макроэкономических переменных. Их учет уменьшает нелинейность на российских данных и на межстрановом уровне, позволяет отнести различия в коэффициенте Оукена разных стран к их индивидуальным эффектам в модели панельных данных 52 крупнейших стран. При помощи значимых индивидуальных эффектов удается оценить потенциальный темп прироста реального ВВП экономик.

Ключевые слова: безработица, спрос, закон Оукена, панельные данные, пространственная эконометрика.

JEL-коды: E24, J11, C23, O47.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1962 г. А. Оукен выявил эмпирическую связь уровня безработицы с разрывом выпуска, впоследствии названную его именем. В работе (Оукен, 1962) по измерению отклонения валового национального продукта (ВНП)¹ от его потенциального уровня, при котором безработица не меняется, Оукен показал, на данных по США с II квартала 1947 г. по IV квартал 1960 г., что рост безработицы на 1 п.п. связан с сокращением ВНП на 3%, причем величина эффекта одинакова и устойчива как во время спадов, так и во время подъемов.

Обычно, см. (Вакуленко, Гурвич, 2015), предполагая, что безработица главным образом меняется в ответ на шоки спроса, см. (Blanchard, Quah, 1989), уравнение регрессии записывается следующим образом:

$$u_t - u_{t-1} = \alpha + \beta \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

либо

$$u_t - u_t^* = b \frac{Y_t - Y_t^*}{Y_t^*} + \vartheta_t, \quad (2)$$

где: u_t — уровень безработицы,

Y_t — реальный выпуск за период t ,

u_t^* и Y_t^* — некоторые естественные уровни безработицы и выпуска.

Параметры β и b называют коэффициентами Оукена.

Сам Оукен тестировал в (Оукен, 1962) спецификацию (1) и спецификацию (2) в виде $u_t = u^* + b \frac{Y_t - Y_t^*}{Y_t^*} + \vartheta_t$, получив коэффициенты $\beta = 0,3$ и $b = 0,36$, а также оценку

¹Сейчас принято называть эту величину валовым национальным доходом (ВНД). Он отличается от валового внутреннего продукта (ВВП) лишь на сальдо чистых факторных платежей из-за границы. В наших спецификациях мы будем использовать ВВП.

уровня безработицы² $u^* = 3,72\%$, подтверждающую принятое тогда мнение, что при уровне безработицы 4% фактический ВВП равен потенциальному, не оказывающему инфляционного давления.

По результатам оценки модели (1) можно рассчитать, какой темп прироста ВВП был бы при постоянной безработице $u_t = u_{t-1}$:

$$g_Y^* = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (3)$$

для чего нужно иметь значимую оценку α , что не всегда встречается в эмпирических работах.

Дальнейшие исследования этих парных регрессий показали, что закономерность остается достаточно устойчивой на уровне отдельных стран. Однако более поздние данные демонстрируют изменение коэффициентов Оукена во времени, см. (Knotek II, 2007). Исследователи объясняли такую нестабильность экономическими особенностями отдельных временных периодов, так же как и межстрановые различия или асимметрию в законе Оукена объясняли особенностями рынков труда, см. (Ball и др., 2017).

Мы подозреваем, что в оценках зависимости безработицы от выпуска есть проблема упущенных переменных, что может исказить оценки и делать их менее значимыми. Также неопределенность для оценки α создает наблюдаемая асимметричность закона Оукена, выражающаяся в разных значениях коэффициента β для положительных и отрицательных изменений темпа выпуска. Эта асимметрия может быть результатом нелинейности в связи безработицы и выпуска, что можно тоже объяснить упущенными переменными. Поэтому мы предлагаем явно учесть экономические и демографические особенности в исходной регрессии, добавив в нее значимые регрессоры, вместо того чтобы пытаться интерпретировать неустойчивые результаты.

В нашей работе мы контролируем на такие переменные, как доля инвестиций в выпуск и темп прироста трудоспособного населения, обосновывая необходимость учета этих переменных при помощи соотношений неоклассической теории роста и баланса труда. Это делает закон Оукена более универсальным, учитывающим различия условий по времени и по странам (или регионам).

Оценивая дополненные демографическими и макропеременными спецификации на российских страновых и региональных данных, мы получаем, что закон Оукен линеен, а коэффициент сопоставим с предыдущими исследованиями.

Оценивая закон на панельных данных по странам, мы получаем единое значение коэффициента Оукена, относя межстрановые различия к индивидуальным эффектам, которые оказываются значимыми для большинства стран. Последнее позволяет получить из закона Оукена оценки потенциального выпуска, соответствующие литературе.

²А. Оукен не использовал термин «естественный уровень безработицы». Он был введен позже (в 1968 г.) Э. Фелпсом и М. Фридменом. В работе (Okin, 1962) 4%-й уровень безработицы лишь обозначен в качестве целевого показателя при существующих рыночных условиях, (Ахундова и др., 2005).

Данная работа призвана показать, какие дополнительные переменные необходимо включать в регрессии, чтобы оценки коэффициента Оукена β были более схожи по странам и по амплитудам шоков, а оценки констант α (или постоянных эффектов в панельных данных) были значимы и позволяли вычислять потенциальные темпы прироста выпуска.

1.1. ОПИСАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

В разделе 2. представлен обзор литературы, затрагивающей основные вопросы нашего исследования. Раздел 3. содержит пример на агрегированных годовых данных по России, как включение в регрессоры демографических показателей может устранять нелинейность в законе Оукена. Раздел 4. посвящен упрощенному теоретическому выводу уравнения регрессии, обосновывающему необходимость включения в регрессоры демографической переменной — темпа прироста трудоспособного населения и макроэкономической переменной — доли инвестиций в выпуске предыдущего периода. В разделе 5. проверена полученная спецификация для регионов России на панельных данных с учетом межрегиональных пространственных эффектов. В разделе 6. на межстрановых панельных данных удалось сделать квадратичный член темпа прироста выпуска незначимым добавлением лагированных темпов прироста выпуска, населения трудоспособных возрастов, а также лагированной доли инвестиций в выпуске (*capital formation*). Для большинства стран получилось определить потенциальные темпы прироста их выпуска.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Помимо спецификаций для приростов (1) и разрывов (2), в литературе встречаются динамические версии закона Оукена в виде авторегрессии с распределенными лагами зависимой и независимой переменных, см. (Obst, 2022) и версии, учитывающие интенсивности использования факторов производства, см. (Prachowcu, 1993), динамику населения и участия в рабочей силе, см. (Gordon, 1984; Altig и др., 1997). Подробно о типах спецификаций изложено в работах (Ахундова и др., 2005; Knotek II, 2007).

2.1. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗАКОНА ОУКЕНА И МЕХАНИЗМЫ РЫНКА ТРУДА

Казалось бы, неоклассическая производственная функция уже дает некоторую оценку связи между выпуском и рабочей силой, которая участвует в его создании. В то же время предпосылка о высокой эластичности замещения факторов производства выглядит чрезмерно ограничивающей. Если бы компании действовали строго в соответствии с неоклассической теорией, они бы нанимали либо увольняли работников при малейших изменениях выпуска. Для стандартной эластичности выпуска по труду ($2/3$) коэффициент Оукена должен был бы составлять $1,5$ ($1:2/3$) — (Ball и др., 2017). В реальности такого не наблюдается: коэффициент Оукена для

США более чем в 3 раза ниже. Как отмечал Оукен, в краткосрочной перспективе труд квазификсирован, поскольку поиск, обучение и увольнение работника требуют некоторого времени и издержек (Ball и др., 2017; Вакуленко, Гурвич, 2015). С другой стороны, в реальности в долгосрочной перспективе полная занятость не достигается, как отмечает Х. Адачи (Adachi и др., 2015), а долгосрочные уровни безработицы варьируются как по странам, так и по времени (в отдельных странах). С помощью модели в среднесрочной перспективе Адачи объясняет величину коэффициентов Оукена эластичностью замещения труда капиталом и степенью жесткости реальных зарплат, задаваемых простым законом из (Blanchard и др., 1997).

Сам Оукен исходил из того, что колебания безработицы отражают изменения в производительности труда, количестве отработанных часов и уровне участия рабочей силы. Например, в фазе оживления изменения в занятости проходят несколько этапов: вначале компании увеличивают загрузку рабочей силы (отработанные часы), затем нанимают ранее уволенных «циклических безработных», а затем, если оптимизм сохраняется, нанимают дополнительных работников (Hobbs, 2013). Тем самым закон Оукена позволяет внести эмпирические корректировки в изменения занятости, прогнозируемые с помощью неоклассической производственной функции. М. Прачовны отмечает, что закон Оукена выполняется только тогда, когда численность рабочей силы, среднее количество отработанных часов на одного работника и производительность движутся однонаправленно, (Prachowny, 1993).

Чем ниже по модулю коэффициент Оукена, тем слабее безработица связана с выпуском, тем в большей степени рынок труда соответствует модели, в которой сложно уволить работника, и, как следствие, происходит в большей мере ценовая, чем количественная, подстройка. Ряд исследователей утверждают, что закон Оукена нарушается во время кризисов, что коэффициент Оукена стал нестабильным и отражает рост зависимости занятости от динамики производства (см. подробнее в обзоре (Вакуленко, Гурвич, 2015)). Тем не менее это укладывается в общую логику: чем более ригиден рынок труда, тем меньше по модулю коэффициенты Оукена.

Основоположники неошумпетерианской теории (эндогенного) экономического роста Ф. Агийон и П. Ховитт рассматривают смежную задачу — вывод связи между ростом потенциального выпуска, обусловленным технологическим развитием, и долгосрочной безработицей (Aghion, Howitt, 1994). Построив вариант модели поиска на рынке труда в экономике с инновациями, они приходят к выводу, что эта связь определяется двумя разнонаправленными тенденциями. С одной стороны, ускорение роста в инновационных секторах делает более выгодным создание новых компаний, которые в свою очередь увеличивают количество вакансий. Авторы называют его эффектом капитализации (capitalization effect) и утверждают, что он приводит к снижению равновесной безработицы. В противоположную сторону действует эффект созидательного разрушения (creative destruction effect). Ускорение экономического роста на фоне более частых банкротств неконкурентоспособных компаний снижает продолжительность занятости (reduce the duration of job match). Это способствует росту уровня безработицы как напрямую, в связи с большим выбытием работников, так и косвенно, через снижение стимулов компаний создавать новые вакансии.

Развивая концепцию эндогенного роста с эффективными зарплатами³, где фирма относительной зарплатой и уровнем безработицы управляет эффективностью работников, М. Цаглер (Zagler, 1999) приходит к более однозначным выводам. В модели с одинаково эффективными монополистически конкурентным обрабатывающим сектором и конкурентным инновационным сектором уровень безработицы оказывает негативное влияние на долгосрочный рост. Если эффективность секторов различается, появляется и отрицательная зависимость уровня безработицы от темпов роста: когда инновационная активность низка и долгосрочный рост замедляется, работники переходят в обрабатывающий сектор, где работодатель увеличивает уровень безработицы, чтобы сохранить эффективность труда работников.

Условно выделяя шоки спроса и предложения, можно показать, что на безработицу влияют в основном шоки спроса, а шоки предложения, обусловленные в частности неравномерностью технологического развития, влияют на безработицу незначимо, см. Рис. 2 в (Blanchard, Quah, 1989). Поэтому можно считать, что изменения выпуска из-за шока спроса приводят к изменению безработицы и безработица зависит от выпуска, как в подавляющем большинстве эмпирических исследований закона Оукена.

2.2. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОУКЕНА ДЛЯ ГРУПП СТРАН

Спустя 16 лет после выхода работы Оукена Дж. Тейтом из ФРБ Сент-Луиса воспроизвел его оценки для США с учетом расширившейся выборки, (Tatom, 1978). Хотя значение b в уравнении (2) получилось сопоставимым (0,325–0,359 по модулю в зависимости от оценок разрыва выпуска), существенно (более чем на 1 п.п.) выросло значение естественной безработицы — с менее 4 до около 5%. Оценивая реакцию разрыва безработицы на разрыв выпуска, Тейтом получил существенно более высокую чувствительность — около 0,45 по модулю. Отсюда следует, делает вывод Тейтом, что потери выпуска от неполной занятости на самом деле ниже, чем предполагалось Оукеном.

Незадолго до мирового финансового кризиса 2007–2009 гг. исследователи отмечали ослабление или даже исчезновение закона Оукена, когда на фоне замедления экономического роста безработица продолжала снижаться, (Knotek II, 2007). Э. Кнотек оценивал различные спецификации закона Оукена для США на квартальных данных за 1948–2007 гг. и получил для уравнения в приростах $\beta = -0,07$ (тот же коэффициент на годовых данных — $(-0,35)$). Хотя зависимость не всегда остается стабильной, ее можно использовать для прогнозирования безработицы — результаты превосходят прогноз по авторегрессии, (Knotek II, 2007).

(Ball и др., 2017) находят подтверждения долгосрочной стабильности коэффициентов Оукена для 20 стран ОЭСР. Они отвергают утверждения о нарушении закона Оукена в 1990–2000-е гг., объясняя меньшие колебания занятости более медленным восстановлением экономики, которое сопровождалось сохранением отрицательного

³Равновесная безработица в модели называется не ускоряющей темп роста зарплат, NAWRU — Non-Accelerating Wage Rate of Unemployment.

разрыва выпуска. По мнению (Ball и др., 2017), коэффициенты Оукена существенно варьируются по странам из-за национальных особенностей рынка труда, а не различий в трудовом законодательстве.

По оценкам (Pegman и др., 2015), для мира в целом коэффициент Оукена для уровней (b) составляет $-0,61$. По оценкам (Ball и др., 2017), b варьируется от $-0,15$ для Японии с ее традициями пожизненного найма до $-0,8$ для Испании, где распространены краткосрочные трудовые контракты. Коэффициент $-0,24$ для Швейцарии они объясняют большими колебаниями в рабочей силе из-за миграции: когда занятость растет, больше мигрантов прибывает в страну и наоборот, тем самым уровень безработицы остается более стабильным.

Для стран СНГ (Ibragimov, Ibragimov, 2017) получают оценки β от $(-0,01)$ для Белоруссии и Казахстана до $(-0,05) - (-0,07)$ для России, Украины, Узбекистана и Молдовы.

2.3. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОУКЕНА ДЛЯ РОССИИ

Ранние оценки закона Оукена для России (с 1994 по 2004 гг.) дают самые низкие значения коэффициента Оукена из уравнения в приростах (β): $(-0,07)$, при этом среднесрочное значение (с учетом лагов выпуска) достигает $(-0,2)$ — см. подробнее (Ахундова и др., 2005).

По оценкам (Вакуленко, Гурвич, 2015) на годовых данных за 1995—2013 гг., для России коэффициент Оукена (β) составляет $(-0,17)$, на квартальных данных абсолютное значение коэффициента ниже — $(-0,1)$. Среднесрочный коэффициент Оукена (сумма лагов), по их оценкам, составляет $(-0,15)$. Применение в работе Вакуленко (Вакуленко, 2015) к этим данным методов пространственной эконометрики, учитывающих влияние соседних регионов, позволило устранить асимметричность в законе Оукена.

В работе (Казакова, 2017) проверяется чувствительность результатов Вакуленко и Гурвича к выбору эконометрической спецификации. Оценка модели в разрывах (1) на квартальных данных для периода 1995—2017 гг. дает коэффициент $b = -0,2$. Ненаблюдаемые переменные автор оценивает с помощью фильтра Ходрика - Прескотта. Стоит отметить, что в последнее время в литературе применительно к данному фильтру появилась критика Хэмилтона, см., например, (Hamilton, 2018). На этом фоне более обоснованным выглядит применение многомерных фильтров, учитывающих совместную динамику нескольких макропеременных, таких как фильтр Калмана. (Ibragimov, Ibragimov, 2017) в своем исследовании делают попытку решить проблему эндогенности МНК-оценок, используя модель с инструментальными переменными для периода 1995—2011 гг., получили почти вдвое меньшее значение: $(-0,05) - (-0,07)$.

(Семитуркин и др., 2021) рассчитали коэффициенты Оукена (β) в региональном разрезе на годовых данных за 2000—2019 годы. Они получили, что коэффициент колеблется от $(-0,01)$ для СКФО до $(-0,21)$ для СФО, составляя для ЦФО $(-0,1)$ и в среднем для России $(-0,14)$.

Величина коэффициентов Оукена для России может быть связана с особенностями российского рынка труда, см. (Казакова, 2017), для которого характерна подстройка скорее за счет выплат работникам и отработанных часов, чем за счет количества занятых. В частности, в России компании избегают потери квалифицированных кадров, пособия по безработице и минимальная зарплата невелики, а профсоюзы слабы, что компенсируется многочисленными законодательными механизмами защиты работника от увольнения (но не от невыплаты денежного вознаграждения). Абсорбером работников, выбывающих из числа занятых, служит довольно большой неформальный сектор, для которого характерны малооплачиваемые виды деятельности, отсутствие социальных пособий и низкий уровень образования и квалификации.

2.4. АСИММЕТРИЯ ЗАКОНА ОУКЕНА

Асимметрия кривой Оукена может быть отражением нелинейности кривой Филлипса, (Harris, Silverstone, 2001; Ахундова и др., 2005).

Харрис и Сильверстон (Harris, Silverstone, 2001) оценивают с помощью ЕСМ и TAR с индикаторной функцией Хевисайда асимметричный закон Оукена для 7 стран ОЭСР для периода 1978—1999 гг. (квартальные данные). Во всех странах, где ВВП и уровень безработицы оказались коинтегрированы (Австралия, Германия, Япония, Новая Зеландия, Великобритания и США), была выявлена асимметричная подстройка к равновесию. В период спада безработица подстраивается ожидаемо (растет), приближая экономику к равновесию. В то же время в фазе подъема подстройка происходит в «неправильном» направлении, удаляя экономику от равновесия.

(Virén, 2001) обнаруживает свидетельства асимметричности закона Оукена для 20 стран ОЭСР за период 1960—1997 гг., используя пороговые ЕСМ-модели. Автор приходит к выводу, что в фазе подъема выпуск сильнее влияет на безработицу, чем в фазе спада.

(Silvapulle и др., 2004) строят асимметричную динамическую модель, рассматривая более протяженный временной интервал — квартальные данные по США за 1947—1999 годы. Они выявляют значимую асимметричность коэффициентов Оукена для разных фаз экономического цикла (они различаются почти в 2 раза, достигая по модулю 0,58 для спадов и 0,32 для подъемов).

(Fontanari и др., 2020) оценивают линейную динамическую (с 2 лагами) и нелинейные (с порогами) версии закона Оукена в приростах для США на квартальных данных за 1959—2018 годы. Для линейной спецификации их оценка близка к распространенной в литературе (−0,37). В то же время включение структурного сдвига в 2009 г. (сокращения потенциального выпуска) зависимость существенно ослабляется — с учетом лагов коэффициент падает до (−0,08) — (−0,22). В пользу наличия структурного сдвига говорят скользящие регрессии. Авторы также тестируют другую нелинейную спецификацию — с различными режимами безработицы (низкий, средний и высокий). В результате коэффициенты Оукена получаются различными: от (−0,29) для режима низкой безработицы до (−0,49) для режима высокой.

Отметим, что более высокий коэффициент Оукена для высоких уровней безработицы позволяет отвергнуть гипотезу «накопления рабочей силы» (labour hoarding), согласно которой фирмы в кризис замедляют увольнения, чтобы сохранить у себя работников, в обучение и развитие которых были вложены средства.

Ранние оценки выявляют асимметричность закона Оукена для России на квартальных данных за 1994—2004 годы. (Ахундова и др., 2005): сокращение безработицы на 1 п.п. реальный ВВП увеличивался примерно в ответ на 3% (что соответствует первоначальным оценкам Оукена для США), при этом прирост безработицы значимого влияния на ВВП не оказывал.

(Вакуленко, Гурвич, 2015) выявляют асимметричность закона Оукена для России на квартальных данных за 1995—2013 гг., получая незначимую оценку коэффициента β для ускорений ВВП — $(-0,056, \text{статистически незначим})$, и значимую для замедлений ВВП — $(-0,14)$.

3. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ЗАКОНА ОУКЕНА В ДАННЫХ ПО РОССИИ

На примере агрегированных годовых российских данных покажем, как решаются основные задачи нашего исследования: сгладить нелинейность в законе Оукена учетом возможно упущенных переменных и рассчитать с его помощью естественный или потенциальный темп прироста ВВП экономики. Рассмотрим спецификацию (1) для российских данных (тонкие прямые линии на Рис. 1 и 2, первая модель в Табл. 1), где опускаем для краткости индекс времени t , Δ обозначает приращение относительно предыдущего значения, $\Delta u = u_t - u_{t-1}$, а $g_Y = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$ — темп прироста реального выпуска Y .

Нелинейность можно показать, добавляя в качестве регрессора квадрат темпа прироста выпуска, коэффициент при котором β_2 оказывается значимым:

$$\Delta u = \alpha + \beta g_Y + \beta_2 g_Y^2 + \epsilon, \quad (4)$$

см. жирные параболы на Рис. 1 и 2, а также вторую модель в Табл. 1. Но добавление в качестве контрольной переменной темпа прироста трудоспособного населения устраняет значимость квадратичного члена (третья модель в Табл. 1) и приводит нас к итоговой спецификации:

$$\Delta u = \alpha + \beta g_Y + \beta_N g_N + \epsilon, \quad (5)$$

где: $g_N = \frac{N_t - N_{t-1}}{N_{t-1}}$ — темп прироста трудоспособного населения N , значимо влияющий на изменение безработицы (четвертая модель в Табл. 1).

В связи с проведением пенсионной реформы, которая в несколько этапов увеличивала возраст выхода на пенсию для мужчин и женщин, темп прироста трудоспособного населения оказывается формально завышен по сравнению с темпами роста фиксированных возрастных когорт, см. например, 2019 и 2021 гг. на Рис. 5 и 4.⁴ Поэтому для расчетов вместо g_N мы брали темп прироста количества всего населения в возрасте с 20 до 60 лет (g_{N20-60}). Заметим, что если в качестве зависимой

⁴До 01.01.2019 включительно — мужчины в возрасте 16—59 лет, женщины

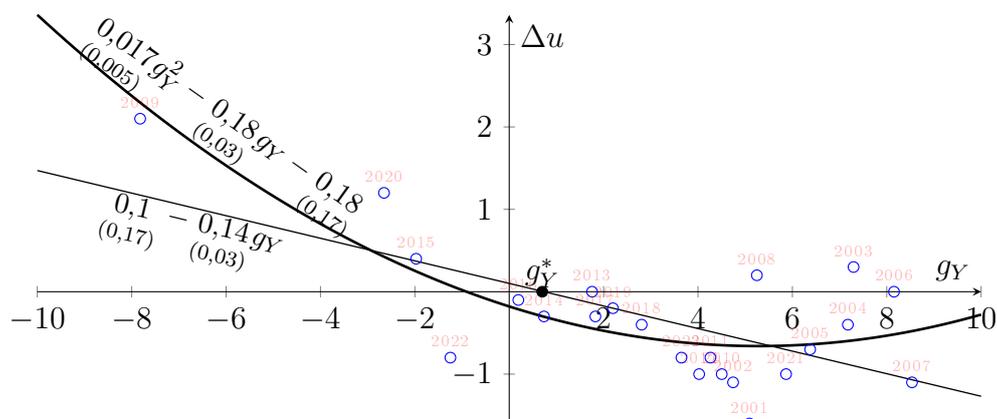


Рис. 1. Зависимость прироста Δu безработицы от темпа g_Y прироста реального выпуска в России с 2001 по 2023 годы. Жирная линия — МНК-аппроксимация параболой с $R^2 = 0,62$. Тонкая линия — линейная МНК-аппроксимация с коэффициентом Оукена $-0,14$ и потенциальным темпом прироста ВВП $g_Y^* = 0,7\%$, обозначенным черной точкой (в скобках указаны стандартные отклонения).

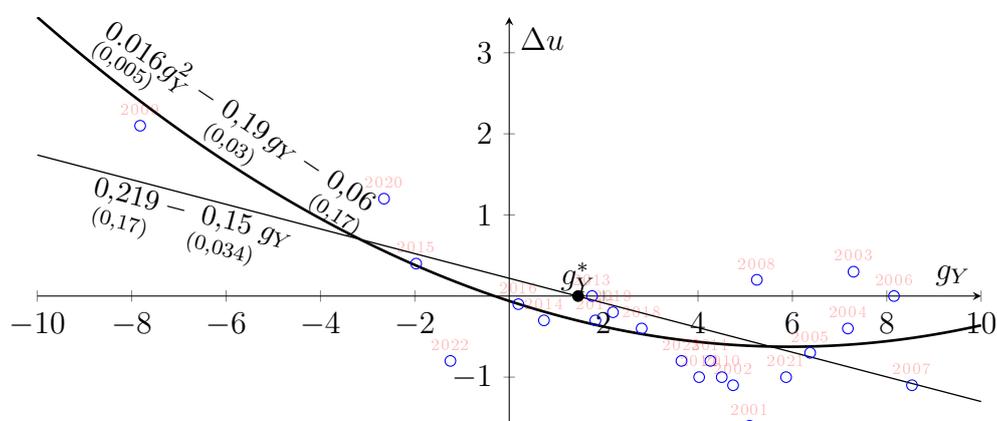


Рис. 2. Зависимость прироста Δu безработицы от темпа g_Y прироста реального выпуска в России с 2001 по 2021 годы. Жирная линия — МНК-аппроксимация параболой с $R^2 = 0,67$. Тонкая линия — линейная МНК-аппроксимация с коэффициентом Оукена $\beta = -0,15$ и потенциальным темпом прироста ВВП $g_Y^* = 1,46\%$, обозначенным черной точкой (в скобках указаны стандартные отклонения).

Δu	линейная	квадратичная	с контролем	линейная с контролем
константа	0,216 (0,174)	-0,069 (0,159)	0,023 (0,238)	0,392* (0,170)
g_Y	-0,126** (0,034)	-0,162*** (0,028)	-0,169*** (0,031)	-0,169*** (0,035)
g_Y^2		0,015** (0,005)	0,013 (0,006)	
g_{N20-60}			0,101 (0,190)	0,362* (0,155)
R^2	0,482	0,712	0,718	0,627
Adj. R^2	0,448	0,670	0,653	0,574
Num. obs.	17	17	17	17
g_Y^*	1,71	-0,41	0,14	2,33*

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 1. Регрессии по данным Росстата с 2003 по 2019 годы

переменной взять темп прироста количества занятых, то константа и квадратичный член остаются незначимы, что можно видеть на Рис. 3.

Мы ограничиваемся годовыми данными, так как данные по возрастному составу населения доступны с годовой частотой, при этом значимость коэффициента Оукена сохраняется. К тому же на квартальных данных в литературе показана значимость лагов темпа прироста ВВП вплоть до 4-го, см. например (Вакуленко, Гурвич, 2015), что можно объяснить тем, что характерное время процесса адаптации безработицы к шокам спроса — порядка года, а также тем, что десезонирование квартальных данных могло распространить шок из одного квартала на соседние.

3.1. ЕСТЕСТВЕННЫЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ТЕМПЫ ПРИРОСТА ВВП

Оценив на российских данных модель (1) можно рассчитать по формуле (3), какой темп прироста ВВП был бы при постоянной безработице $\Delta u = 0$, который обозначен черной точкой на Рис. 2. Однако константа в первой регрессии в Табл. 1 незначима. По результатам оценки модели (5) в последнем столбце Табл. 1 можно рассчитать на 5% уровне значимости, какой (естественный) темп прироста ВВП был бы при постоянной безработице $\Delta u = 0$ и текущем темпе g_{N20-60} прироста населения в возрасте с 20 до 60 лет, обозначенный жирной коричневой линией на Рис. 5:

$$\bar{g}_Y = -\frac{\alpha + \beta_N g_{N20-60}}{\beta}. \quad (6)$$

— 16–54 года; на 01.01.2020, 01.01.2021 — мужчины в возрасте 16–60 лет. (<http://ssl.rosstat.gov.ru/storage/mediabank/demol4.xlsx>, дата обращения 04.08.2025). Данные на 01.01.2022, 01.01.2023 с учетом итогов Всероссийской переписи населения 2020 г., данные на 01.01.2023 без учета сведений о Донецкой Народной Республике (ДНР), Луганской Народной Республике (ЛНР), Запорожской и Херсонской областей.

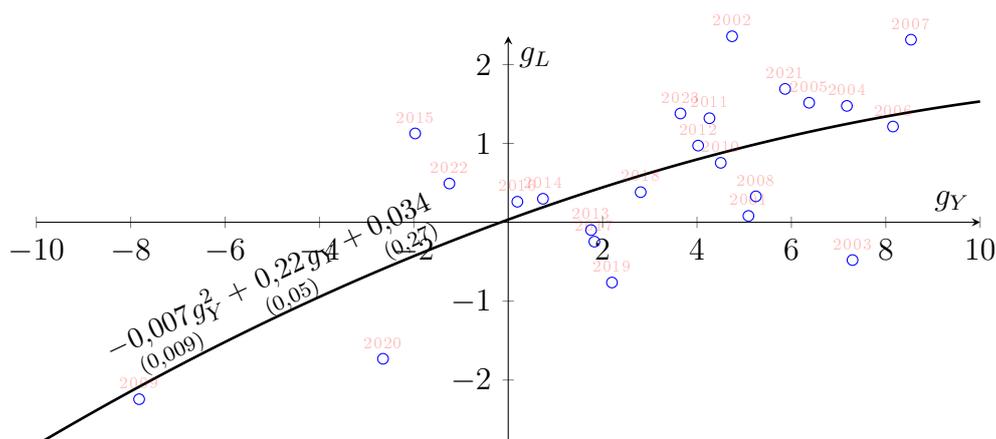


Рис. 3. Зависимость темпа g_L прироста занятых от темпа g_Y прироста реального выпуска в России с 2001 по 2023 гг. МНК-аппроксимация параболой с $R^2 = 0.48$ (в скобках указаны стандартные отклонения).

С этими же оценками по формуле (3) можно определить, каким мог бы быть (потенциальный) темп прироста реального ВВП России, если бы у нее не только не менялся уровень безработицы, но и оставалось постоянным трудоспособное население, $g_{N20-60} \equiv 0$, синяя горизонтальная линия на Рис. 5:

$$g_Y^* \approx \frac{0.392}{0.169} = 2.3\%.$$

Подставляя в формулу (6) прогнозируемые в будущем величины g_{N20-60} , можно получать разные значения потенциального темпа прироста ВВП. Из-за малого количества наблюдений значимо определить потенциальный выпуск удалось только на постоянном уровне. Когда вместо темпа прироста населения в возрасте с 20 до 60 лет, g_{N20-60} , использовался темп прироста трудоспособного населения, оценка потенциального выпуска была ниже и оказывалась незначимой, что можно объяснить влиянием пенсионной реформы. Однако, как будет показано далее, в панельных регрессиях темп прироста трудоспособного населения везде оказывался значимым.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОБОСНОВАНИЯ

Не строя модели рынка труда, как (Adachi и др., 2015), при помощи модели роста и баланса трудоспособного населения покажем, какие переменные нужно включить в панельные данные в качестве объясняющих, чтобы учесть межстрановые или межрегиональные различия в законе Оукена.

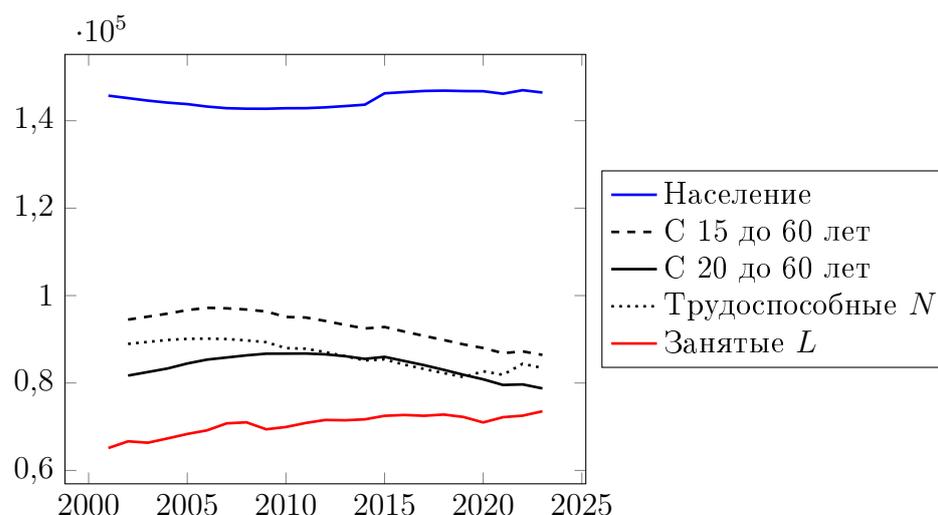


Рис. 4. Количество занятых, трудоспособных возрастов и население по данным Росстата с 2001 по 2023 годы.

4.1. СВЯЗЬ УРОВНЯ БЕЗРАБОТИЦЫ И КОЛИЧЕСТВА ЗАНЯТЫХ

Уровень безработицы u связан с количествами занятых L следующим тождеством:

$$L = (1 - u) p N,$$

где: N — количество трудоспособных в населении с коэффициентом участия в рабочей силе p . Прирост безработицы с точностью до малых следующего порядка

$$\frac{u - u_{-1}}{1 - u^*} = \frac{p - p_{-1}}{p_{-1}} - \frac{L - L_{-1}}{L_{-1}} + \frac{N - N_{-1}}{N_{-1}}, \quad (7)$$

связан с темпами прироста соответствующих величин, где мы предположили, что показатель безработицы не мал, но мало его отличие от некоторого естественного уровня u^* .

4.2. СВЯЗЬ КОЛИЧЕСТВА ЗАНЯТЫХ СО СПРОСОМ

Рассмотрим неоклассическую производственную функцию $Y = B F(K, L)$ от капитала K и труда L , которую характеризуют:

- постоянная отдача от масштаба (линейная однородность по (K, L))
- убывающая предельная производительность факторов (вогнутость по K и L).

Предполагается, что коэффициент общей факторной производительности B отражает нейтральный по Хиксу уровень технологического развития и интенсивность использования факторов производства.

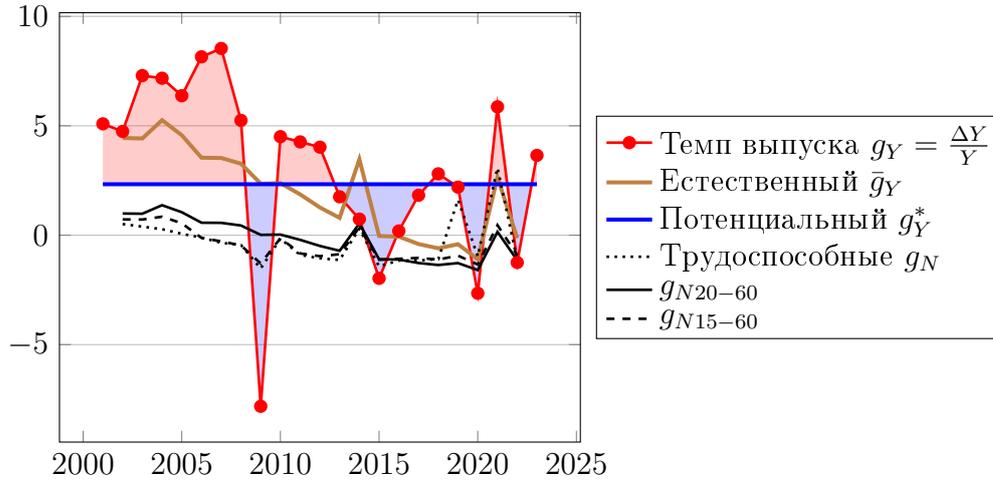


Рис. 5. Отклонение темпа прироста реального выпуска от его потенциально-го значения ($g_Y^* = 2,33\%$) при постоянном уровне безработицы и количестве населения в возрасте от с 20 до 60 лет, по данным Росстата. Темпы прироста трудоспособного населения g_N , населения в возрасте с 20 до 60 лет, g_{N20-60} , и населения в возрасте, g_{N15-60} , обозначены черными точечной, сплошной и штриховой линиями соответственно.

Можем записать связь темпа прироста выпуска с изменением факторов производства

$$\frac{Y - Y_{-1}}{Y_{-1}} = \frac{B - B_{-1}}{B_{-1}} + MP_K \frac{K - K_{-1}}{Y_{-1}} + \varepsilon_L \frac{L - L_{-1}}{L_{-1}} \quad (8)$$

через предельную производительность капитала MP_K и эластичность выпуска по труду ε_L :

$$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = B \frac{\partial F}{\partial K}, \quad \varepsilon_L = \frac{L}{Y} \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{L}{F} \frac{\partial F}{\partial L}.$$

Предельная производительность капитала выражается через его среднюю производительность следующим образом:

$$MP_K = \varepsilon_K \frac{Y}{K}. \quad (9)$$

Заметим, что эластичности ε_K и ε_L не зависят явно от общей факторной производительности B и ввиду постоянной отдачи от масштаба $\varepsilon_K + \varepsilon_L = 1$. А предельная производительность MP_K убывает по K , но прямо пропорциональна B и согласно неоклассической теории роста MP_K стремится к константе.

4.3. ДИНАМИКА КАПИТАЛА И ИНВЕСТИЦИИ

Чистый прирост капитала

$$K - K_{-1} = I_{-1} - \delta K_{-1},$$

происходит благодаря валовым инвестициям предыдущего периода I_{-1} за вычетом выбытия капитала K_{-1} , оставшегося с предыдущего периода, где $\delta > 0$ — постоянная норма выбытия капитала. Тогда доля чистых инвестиций в выпуске выражается через долю валовых инвестиций:

$$\frac{K - K_{-1}}{Y_{-1}} = \frac{I_{-1}}{Y_{-1}} - \delta \frac{K_{-1}}{Y_{-1}},$$

где: $\frac{K}{Y}$ — обратная величина к средней производительности капитала. Тогда формула (8) с учетом (9) примет вид:

$$\frac{Y - Y_{-1}}{Y_{-1}} = \frac{B - B_{-1}}{B_{-1}} + MP_K \frac{I_{-1}}{Y_{-1}} - \varepsilon_K \delta + \varepsilon_L \frac{L - L_{-1}}{L_{-1}}. \quad (10)$$

4.4. ЕСТЕСТВЕННЫЙ РОСТ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ И РЕАКЦИЯ НА ШОКИ

Будем считать, что в отсутствие шоков, уровни безработицы и участия в рынке труда не меняются. Тогда, согласно (7), количество занятых и количество трудоспособных растут с одинаковыми темпами:

$$u = const, \quad p = const \quad \Rightarrow \quad \frac{L - L_{-1}}{L_{-1}} = \frac{N - N_{-1}}{N_{-1}},$$

а доля инвестиций в выпуске и темп прироста общей факторной производительности постоянны:

$$\frac{I}{Y} \equiv s, \quad \frac{B - B_{-1}}{B_{-1}} \equiv g.$$

Темп прироста выпуска в таких условиях \bar{g}_Y будем называть естественным:

$$\bar{g}_Y = g + MP_K s - \varepsilon_K \delta + \varepsilon_L \frac{N - N_{-1}}{N_{-1}}, \quad (11)$$

а если к тому же трудоспособное население постоянно, то такой темп прироста выпуска g_Y^* :

$$g_Y^* = g + MP_K s - \varepsilon_K \delta, \quad (12)$$

будем называть потенциальным. Предположим, что темп прироста общей факторной производительности

$$\frac{B - B_{-1}}{B_{-1}} = g + \nu \left(\frac{Y - Y_{-1}}{Y_{-1}} - \bar{g}_Y \right), \quad (13)$$

может отклоняться от константы g из-за изменения общей интенсивности использования факторов, связанного с шоками спроса, пропорционально отклонению темпа прироста выпуска $\frac{Y - Y_{-1}}{Y_{-1}}$ от естественного значения \bar{g}_Y с коэффициентом пропорциональности ν .

4.5. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Подставив выражение (13) в (10), с учетом (7) получаем⁵ уравнение регрессии в виде:

$$\Delta u = \alpha + \beta g_Y + \beta_I \frac{I_{-1}}{Y_{-1}} + \beta_p g_p + \beta_N g_N + \epsilon, \quad (14)$$

где используются обозначения:

$$g_Y = \frac{Y - Y_{-1}}{Y_{-1}}, \quad g_N = \frac{N - N_{-1}}{N_{-1}}, \quad g_p = \frac{p - p_{-1}}{p_{-1}},$$

и коэффициенты имеют следующий смысл:

$$\alpha = -(1 - u^*) \left((1 - \nu) \frac{\varepsilon_K \delta - g}{\varepsilon_L} + \nu MP_K s \right), \quad (15)$$

$$\beta = -(1 - u^*) \frac{1 - \nu}{\varepsilon_L}, \quad (16)$$

$$\beta_I = (1 - u^*) MP_K, \quad (17)$$

$$\beta_p = (1 - u^*), \quad (18)$$

$$\beta_N = (1 - u^*) (1 - \nu). \quad (19)$$

Эту спецификацию проверим на панельных данных по регионам России и по 52-м крупным (по ВВП) странам мира.

5. РЕГИОНАЛЬНЫЕ ПАНЕЛЬНЫЕ РЕГРЕССИИ

На данных российских регионов значимой нелинейности не наблюдалось. На основании уравнения (14) рассмотрим 2 спецификации модели: в первой — зависимость изменения безработицы от прошлогоднего темпа роста реального валового регионального продукта (ВРП) и от прошлогоднего прироста количества трудоспособного населения в регионах. Во второй — расширенную спецификацию модели 1 с добавлением прошлогодней доли инвестиций в выпуск и прошлогоднего темпа прироста коэффициента участия в рабочей силе. Данные по всем переменным были собраны с помощью сайта Росстата по 80 регионам России за период с 2011 по 2021 годы.

В Табл. 2 представлены результаты расчетов пуловых моделей, моделей с фиксированными и случайными эффектами для обеих спецификаций. Для расчетов использовался пакет `plm` в среде R (Croissant, Millo, 2008).

5

$$g_Y = g + \nu (g_Y - g - MP_K s + \varepsilon_K \delta - \varepsilon_L g_N) + MP_K \frac{I_{-1}}{Y_{-1}} - \varepsilon_K \delta + \varepsilon_L \left(g_p - \frac{\Delta u}{1 - u^*} + g_N \right)$$

$$\frac{\Delta u}{1 - u^*} = g_p + (1 - \nu) g_N - \frac{1 - \nu}{\varepsilon_L} (g_Y - g + \varepsilon_K \delta) + MP_K \left(\frac{I_{-1}}{Y_{-1}} - \nu s \right).$$

Переменная	Pool1	FE1	RE1	Pool2	FE2	RE2
Константа	0,125*** (0,066)		0,125*** (0,066)	0,378* (0,158)		0,378* (0,158)
$g_Y(-1)$	-0,102*** (0,016)	-0,105*** (0,018)	-0,102*** (0,016)	-0,098*** (0,016)	-0,101*** (0,018)	-0,098*** (0,016)
$g_N(-1)$	0,102** (0,031)	0,215*** (0,045)	0,102** (0,031)	0,111*** (0,031)	0,244*** (0,045)	0,111*** (0,031)
$I/Y(-1)$				-0,010 (0,006)	-0,010 (0,009)	-0,010 (0,006)
$g_p(-1)$				0,049* (0,023)	0,082** (0,025)	0,049* (0,023)
R^2	0,063	0,086	0,063	0,072	0,102	0,072
Adj. R^2	0,061	-0,030	0,061	0,067	-0,016	0,067
Num. obs.				720		
s_{idios}			1,351			1,342
s_{id}			0,000			0,000

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 2. Модели панельных регрессий по данным Росстата с 2011 по 2021 годы

Результаты тестов сравнения моделей панельных данных в Табл. 3 показывают, что пуловые модели предпочтительнее моделей с фиксированными эффектами, модели со случайными эффектами лучше пуловых моделей, а модели с фиксированными эффектами лучше моделей со случайными эффектами. Таким образом, результаты тестов зациклены и не дают однозначного ответа о наилучшей модели. Поэтому для региональных данных необходимо применять другую спецификацию, возможно, учитывающую пространственные эффекты (Elhorst, 2014).

Тест	Статистика	p -значение	Результат
F-тест	0,661	0,989	Pool1 лучше чем FE1
Множителей Лагранжа	7,294	0,007	RE1 лучше чем Pool1
Хаусмана	14,441	0,001	FE1 лучше чем RE1
F-тест	0,730	0,959	Pool2 лучше чем FE2
Множителей Лагранжа	6,230	0,013	RE2 лучше чем Pool2
Хаусмана	21,464	0,000	FE2 лучше чем RE2

Табл. 3. Результаты тестов для сравнения моделей панельных данных

Для проверки стационарности панельных данных был применен тест Има – Песарана – Шина (IPS), который отвергает гипотезу о наличии единичного корня для всех переменных (Табл. 4). Кроме того, тест Песарана на кросс-секционную зависимость (CD) указывает на наличие значимой пространственной зависимости между регионами по всем переменным.

Переменная	IPS тест	CD тест
u	-11,275***	51,259***
$g_Y(-1)$	-9,923***	70,082***
$I/Y(-1)$	-5,604***	69,150***
g_N	-4,354***	114,940***
$g_p(-1)$	-11,061***	28,194***

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 4. Тесты на стационарность и кросс-секционную зависимость

5.1. МОДЕЛИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Для обоснования использования пространственных эконометрических моделей также были проведены робастные LM-тесты (Robust Lagrange Multiplier tests), которые показали статистически значимое наличие как пространственной лаговой зависимости, так и пространственной автокорреляции ошибок в обеих спецификациях моделей, что обосновывает использование SARAR-моделей для анализа. Тест Хаусмана для пространственных моделей показывает, что при добавлении в качестве регрессоров прошлогодних доли инвестиций в выпуске $I/Y(-1)$ и темпа прироста показателя участия в рабочей силе $g_p(-1)$ модель с фиксированными эффектами становится предпочтительнее (Табл. 5).

	Статистика	Результат
LM-тест на наличие пространственного лага	27,68*	есть в модели 1
(робастный к пространственной ошибке)	26,06*	есть в модели 2
LM-тест на наличие пространственной ошибки	15,35*	есть в модели 1
(робастный к пространственному лагу)	13,71*	есть в модели 2
Тест Хаусмана для пространственных моделей	5,410	SRE1 лучше, чем SFE1
	24,23***	SFE2 лучше, чем SRE2

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 5. Результаты тестов на наличие пространственных эффектов

Применим к региональным данным модель SARAR (spatial autoregressive model with autoregressive error term):

$$y_{it} = \lambda(Wy)_{it} + x_{it}\beta + \mu_i + \varepsilon_{it}, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{it} = \rho(W\varepsilon)_{it} + \nu_{it}, \quad (21)$$

где: x_{it} — вектор-строка регрессоров,
 β — вектор-столбец их коэффициентов,
 W — нормированная матрица близости регионов, при помощи которой задается пространственный лаг зависимой переменной y с коэффициентом λ и пространственный лаг ошибки ε с коэффициентом ρ ;

μ_i — индивидуальные эффекты;

ν_{it} — случайная ошибка.

В качестве матрицы весов использовалась граничная матрица, элементы которой равны 1 (если регионы имеют общую границу) и 0 (если не имеют); затем матрица нормировалась по строкам. Результаты оценивания моделей представлены в Табл. 6.

Переменная	SFE1	SRE1	SFE2	SRE2
ρ	-0,602*** (0,087)	-0,611*** (0,085)	-0,593*** (0,087)	-0,616*** (0,085)
λ	0,651*** (0,051)	0,667*** (0,049)	0,642*** (0,051)	0,666*** (0,049)
Константа		0,092* (0,038)		0,260* (0,110)
$g_Y(-1)$	-0,062*** (0,013)	-0,062*** (0,011)	-0,059*** (0,014)	-0,060*** (0,012)
$g_N(-1)$	0,099** (0,030)	0,048* (0,020)	0,129*** (0,032)	0,056** (0,020)
$I/Y(-1)$			-0,006 (0,006)	-0,006 (0,004)
$g_p(-1)$			0,064** (0,020)	0,042* (0,018)
R^2	0,173	0,048	0,185	0,056
Log-Likelihood	-1187	-1194	-1182	-1191
AIC	2383	2398	2376	2396
BIC	2401	2421	2403	2428
Num. obs.			720	

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 6. Модели пространственных панельных регрессий, по данным Росстата с 2011 по 2021 годы

В пространственных моделях коэффициент при регрессоре не показывает их полное влияние на зависимую переменную. Полный предельный эффект можно определить, учитывая косвенный пространственный эффект (Табл. 7). Видно, что полный коэффициент Оукена примерно одинаков, $\beta = -0,17$, и соответствует результатам модели для агрегированных данных в последнем столбце Табл. 1, а также результатам (Вакуленко, Гурвич, 2015).

Проверим также другие спецификации моделей с пространственными эффектами: статическую и динамическую модель Дарбина (Табл. 8) и найдем для них предельные эффекты (Табл. 9).

По критериям качества лучшей моделью является пространственная модель Дарбина с динамической спецификацией и расширенным набором регрессоров (SDM2), что подтверждается наименьшим значением информационного критерия AIC (1984),

Модель	Переменная	Прямой эффект	Косвенный эффект	Полный эффект
SRE1	$g_Y(-1)$	-0,074*** (0,015)	-0,112** (0,039)	-0,186*** (0,052)
	$g_N(-1)$	0,057** (0,024)	0,086* (0,045)	0,143* (0,067)
SFE2	$g_Y(-1)$	-0,069*** (0,015)	-0,096** (0,031)	-0,165*** (0,044)
	$g_N(-1)$	0,151*** (0,037)	0,210** (0,070)	0,362*** (0,103)
	$I/Y(-1)$	-0,007 (0,007)	-0,009 (0,010)	-0,016 (0,017)
	$g_p(-1)$	0,075*** (0,022)	0,105** (0,039)	0,180** (0,058)

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 7. Предельные эффекты в пространственных моделях со случайными эффектами (SRE1) и с индивидуальными эффектами (SFE2)

однако предельные эффекты для всех коэффициентов данной модели оказались незначимы.

Среди моделей с пространственным лагом и пространственной автокорреляцией ошибок (SARAR) лучшей оказалась модель с фиксированными эффектами и расширенным набором регрессоров (SFE2) — наименьшее значение AIC (2 376 против 2 396 у SRE2).

Модели с пространственными эффектами в большинстве случаев демонстрируют значимый полный предельный эффект коэффициента Оукена в диапазоне от -0,17 до -0,21, что соответствует результатам предыдущих исследований. Наличие значимых косвенных эффектов подтверждает важность учета пространственных взаимодействий между регионами.

6. СТРАНОВЫЕ ПАНЕЛЬНЫЕ РЕГРЕССИИ

В уравнении (14) мы добавили прошлогодние значения темпа прироста выпуска чтобы учесть его влияние на нынешнюю безработицу. Результаты в Табл. 10 показывают, что учет темпа прироста трудоспособного населения, прошлогодних доли инвестиций в выпуск и темпа прироста выпуска позволил сделать квадратичную нелинейность незначимой, при этом значимо не изменив коэффициент Оукена.

Переменная	SDM1 Static	SDM2 Static	SDM1 Dynamic	SDM2 Dynamic
ρ	0,194*** (0,049)	0,199*** (0,049)	0,292*** (0,049)	0,289*** (0,049)
$g_Y(-1)$	-0,054** (0,018)	-0,053** (0,018)	-0,052** (0,018)	-0,052** (0,018)
$g_N(-1)$	0,093 (0,049)	0,114* (0,049)	0,050 (0,049)	0,070 (0,049)
$W \times g_Y(-1)$	-0,117*** (0,029)	-0,112*** (0,031)	-0,095** (0,031)	-0,091** (0,032)
$W \times g_N(-1)$	0,106 (0,056)	0,112 (0,060)	0,129* (0,055)	0,130* (0,059)
$I/Y(-1)$		-0,002 (0,009)		0,007 (0,010)
$g_p(-1)$		0,080*** (0,023)		0,067** (0,023)
$W \times I/Y(-1)$		-0,004 (0,013)		0,001 (0,013)
$W \times g_p(-1)$		-0,017 (0,043)		-0,024 (0,043)
u_{t-1}			-0,298*** (0,038)	-0,291*** (0,038)
$W \times u_{t-1}$			0,310*** (0,069)	0,323*** (0,069)
R^2	0,197	0,210	0,280	0,291
Log-Likelihood	-1170	-1164	-986	-981
AIC	2351	2347	1986	1984
BIC	2374	2388	2017	2033
Num. obs.	720	720	640	640

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 8. Результаты оценивания моделей Дарбина, по данным Росстата с 2011 по 2021 годы

Модель	Эффект	Переменная	Прямой	Косвенный	Полный
SDM1 Static		$g_Y(-1)$	-0,058*** (0,017)	-0,153*** (0,033)	-0,211*** (0,033)
		$g_N(-1)$	0,096* (0,048)	0,150* (0,062)	0,245*** (0,064)
SDM2 Static		$g_Y(-1)$	-0,057*** (0,017)	-0,147*** (0,034)	-0,204*** (0,034)
		$g_N(-1)$	0,118* (0,048)	0,168* (0,066)	0,285*** (0,070)
		$I/Y(-1)$	-0,001 (0,009)	-0,005 (0,013)	-0,006 (0,015)
		$g_p(-1)$	0,078*** (0,024)	0,000 (0,047)	0,078 (0,055)
SDM1 Dynamic	Краткосрочный	$g_Y(-1)$	0,940 (11,911)	-0,511 (13,788)	0,429 (6,834)
		$g_N(-1)$	1,126 (17,220)	-2,238 (21,863)	-1,112 (13,897)
	Долгосрочный	$g_Y(-1)$	0,103 (2,152)	-0,085 (2,977)	0,017 (2,237)
		$g_N(-1)$	-0,490 (5,192)	0,718 (6,464)	0,227 (4,676)
SDM2 Dynamic	Краткосрочный	$g_Y(-1)$	0,289 (5,316)	-0,233 (5,966)	0,056 (2,733)
		$g_N(-1)$	0,108 (2,227)	0,977 (12,380)	1,084 (12,631)
		$I/Y(-1)$	0,038 (0,352)	0,184 (1,799)	0,222 (1,861)
		$g_p(-1)$	0,432 (5,339)	-0,582 (7,184)	-0,150 (5,059)
	Долгосрочный	$g_Y(-1)$	-0,093 (8,818)	0,933 (18,451)	0,841 (22,467)
$g_N(-1)$		-39,393 (552,851)	39,874 (553,608)	0,481 (25,777)	
$I/Y(-1)$		0,138 (2,955)	-0,421 (3,327)	-0,283 (1,711)	
$g_p(-1)$		-7,359 (98,108)	11,276 (124,491)	3,917 (72,907)	

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 9. Предельные эффекты в пространственных моделях со случайными эффектами

	Pool1	FE1	RE1	Pool2	FE2	RE2	Pool3	FE3	RE3
константа	-0,0364 (0,1976)		0,228*** (0,034)	0,2454 (0,2262)		0,2872*** (0,0397)	3,3734*** (0,6376)		-0,3021** (0,1112)
g_Y	-0,0447 (0,0417)	-0,138*** (0,0078)	-0,1153*** (0,0073)	-0,0168 (0,0430)	-0,1332*** (0,0077)	-0,1098*** (0,0075)	-0,0019 (0,0418)	-0,1242*** (0,0079)	-0,1114*** (0,0077)
g_Y^2	0,0007 (0,0017)	0,0013*** (0,0003)	0,0014*** (0,0003)	-0,0006 (0,0018)	0,0005 (0,0003)	0,0011*** (0,0003)	-0,0006 (0,0018)	0,0003 (0,0003)	0,0008* (0,0003)
$g_Y(-1)$				-0,1032* (0,0406)	-0,0548*** (0,0076)	-0,0213** (0,0071)	-0,0481 (0,0423)	-0,0686*** (0,0078)	-0,0430*** (0,0075)
g_N							-0,0438 (0,1276)	0,1028** (0,0354)	0,1108*** (0,0230)
$I/Y(-1)$							-0,1337*** (0,0258)	0,0480*** (0,0084)	0,0238*** (0,0045)
g_p							-0,0712*** (0,0073)	-0,0582** (0,0207)	-0,0629** (0,0207)
R^2	0,0009	0,217	0,1753	0,0062	0,2508	0,1814	0,0879	0,2821	0,2230
Adj. R^2	-0,0007	0,18	0,1739	0,0038	0,2153	0,1794	0,0834	0,2462	0,2190
Num. obs.	1224	1196	1196	1224	1196	1196	1224	1196	1196
s_idios			0,9331			0,9131			0,8950
s_id			0,0000			0,0000			0,0000

*** $p < 0,001$; ** $p < 0,01$; * $p < 0,05$

Табл. 10. Модели панельных регрессий, по данным Всемирного банка с 1999 по 2023 годы. В предпочтительной модели с фиксированными эффектами (FE 2) нелинейность относительно темпа прироста выпуска (g_Y^2) становится незначимой при добавлении контрольных переменных.

Тест	Статистика	р-значение	Результат
F-тест	501	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	FE1 лучше чем Pool1
множителей Лагранжа	11,72	0,0006	RE1 лучше чем Pool1
Хаусмана	70,08	$6 \cdot 10^{-16}$	FE1 лучше чем RE1
F-тест	521,04	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	FE2 лучше чем Pool2
множителей Лагранжа	10,30	0,0013	RE2 лучше чем Pool2
Хаусмана	121,88	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	FE2 лучше чем RE2
F-тест	497,18	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	FE3 лучше чем Pool3
множителей Лагранжа	10,89	0,00097	RE3 лучше чем Pool3
Хаусмана	94,89	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	FE3 лучше чем RE3

Табл. 11. Результаты тестов для сравнения моделей панельных данных в Табл. 10

Тесты сравнения моделей в Табл. 11 отдадут предпочтение моделям с фиксированными эффектами.

В модели с фиксированными эффектами (FE3) у многих стран получились значимые величины индивидуальных эффектов (Табл. 12). При помощи этих величин были посчитаны потенциальные темпы прироста выпуска стран g_Y^* (последний столбец Табл. 12).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закон Оукена — одна из наиболее устойчивых эмпирических зависимостей, которая действует в странах, различающихся по уровню развития и особенностям рынка труда. Ряд исследователей задавались вопросом, сохраняется ли линейный характер зависимости либо она стала нелинейной или по крайней мере асимметричной. Мы показали, что кажущаяся нелинейность закона Оукена может быть объяснена пропуском важных демографических и макроэкономических переменных. При добавлении этих переменных в регрессоры удалось отнести различия в коэффициенте Оукена разных стран к их индивидуальным эффектам в модели панельных данных.

На основе баланса трудоспособного населения и анализа неоклассической производственной функции в предположении экзогенного долгосрочного роста общей факторной производительности мы показали, что для учета межстрановых и региональных отличий в законе Оукена можно использовать в качестве контрольных переменных долю инвестиций в выпуск и темп прироста населения трудоспособного возраста.

При помощи панельных регрессий на данных 52-х стран с 1999 по 2023 гг. удалось получить значимые индивидуальные эффекты для большинства стран. При этом коэффициент Оукена можно посчитать как сумму коэффициентов при темпе прироста выпуска и его первом лаге $-0,124 - 0,069 = -0,193$ получаем сопоставим

с оценками для России, $-0,17$, как на агрегированных (Табл. 1), так и на региональных данных (Табл. 7, сумма прямого и косвенного пространственного предельных эффектов). Также сопоставимы проведенные на основе оценок расчеты темпа прироста потенциального выпуска России: $1,64\%$ для агрегированных данных с 2001 по 2012 гг. (Рис. 2) и $1,63\%$ по межстрановым панельным данным (Табл. 12). При этом нелинейность в законе Оукена на страновых данных значительно уменьшается.

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	g_Y^* (%)
ARG	-0,944***	0,237	-3,985	0,000	-0,67
AUS	-0,929**	0,288	-3,228	0,001	1,61
AUT	-0,907**	0,279	-3,251	0,001	1,49
BEL	-0,898***	0,272	-3,299	0,001	1,23
BGD	-0,257	0,304	-0,846	0,398	5,54
BRA	-0,693**	0,244	-2,836	0,005	0,98
CAN	-0,867**	0,269	-3,222	0,001	1,20
CHE	-0,925**	0,290	-3,184	0,001	1,82
CHL	-0,669*	0,279	-2,395	0,017	2,59
CHN	-0,428	0,403	-1,062	0,288	8,13
COL	-0,953***	0,262	-3,635	0,000	0,19
CZE	-1,108***	0,300	-3,696	0,000	1,24
DEU	-0,929***	0,254	-3,654	0,000	0,34
DNK	-0,754**	0,260	-2,900	0,004	1,47
DZA	-2,294***	0,381	-6,022	0,000	-2,27
EGY	-0,352	0,251	-1,401	0,162	2,71
ESP	-0,917***	0,271	-3,382	0,001	1,11
FIN	-1,055***	0,273	-3,868	0,000	0,44
FRA	-0,948***	0,263	-3,611	0,000	0,58
GBR	-0,652**	0,238	-2,740	0,006	1,01
GRC	-0,707**	0,244	-2,904	0,004	1,00
HKG	-0,629*	0,262	-2,397	0,017	2,24
HUN	-0,736**	0,284	-2,593	0,010	2,51
IDN	-0,758*	0,314	-2,411	0,016	3,38
IND	-0,805*	0,348	-2,315	0,021	4,28
IRL	-0,424	0,298	-1,422	0,155	4,52
IRN	-1,521***	0,369	-4,118	0,000	1,42
IRQ	-0,203	0,275	-0,737	0,461	3,95
ISR	-0,929***	0,278	-3,342	0,001	1,12
ITA	-0,986***	0,252	-3,917	0,000	-0,08
JPN	-1,081***	0,284	-3,804	0,000	0,74
KAZ	-0,630*	0,297	-2,122	0,034	3,36
KOR	-0,897**	0,325	-2,761	0,006	3,25
MEX	-0,931***	0,270	-3,445	0,001	0,79
MYS	-0,449	0,282	-1,595	0,111	3,50
NLD	-0,672**	0,255	-2,633	0,009	1,73
NOR	-0,974***	0,281	-3,466	0,001	1,17
NZL	-0,794**	0,272	-2,920	0,004	1,66
PAK	-0,014	0,243	-0,059	0,953	3,89
PER	-0,326	0,263	-1,243	0,214	3,60
PHL	-0,330	0,264	-1,248	0,212	3,36
POL	-0,764**	0,259	-2,947	0,003	1,34
PRT	-0,662**	0,255	-2,596	0,010	1,82
ROU	-0,422	0,287	-1,469	0,142	4,03
RUS	-0,741**	0,265	-2,792	0,005	1,63
SAU	-0,812**	0,311	-2,613	0,009	1,97
SGP	-0,496	0,290	-1,710	0,088	3,91
SWE	-0,667*	0,269	-2,480	0,013	2,28
THA	-0,714*	0,282	-2,533	0,011	2,49
TUR	-0,342	0,300	-1,143	0,253	4,98
USA	-0,708**	0,259	-2,735	0,006	1,66
VNM	-0,568	0,340	-1,671	0,095	5,27

Табл. 12. Фиксированные эффекты модели ФЕЗ

ЛИТЕРАТУРА

- Adachi Hideyuki, Imoto Shin, Inagaki Kazuyuki. Economic growth and unemployment: Theoretical foundations of Okun's law // *Studies in Medium-Run Macroeconomics: Growth, Fluctuations, Unemployment, Inequality and Policies*. 2015. 69–85.
- Aghion Philippe, Howitt Peter. Growth and unemployment // *The review of economic studies*. 1994. 61, 3. 477–494.
- Altig David, Fitzgerald Terry J, Rupert Peter. Okun's law revisited: should we worry about low unemployment? // *Economic Commentary*. 1997. 5/15/1997.
- Ball Laurence, Leigh Daniel, Loungani Prakash. Okun's Law: Fit at 50? // *Journal of Money, Credit and Banking*. 2017. 49, 7. 1413–1441.
- Blanchard Olivier J., Nordhaus William D., Phelps Edmund S. The Medium Run // *Brookings Papers on Economic Activity*. 1997. 1997, 2. 89–158.
- Blanchard Olivier Jean, Quah Danny. The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. // *American Economic Review*. 1989. 79, 4.
- Croissant Yves, Millo Giovanni. Panel Data Econometrics in R: The plm Package // *Journal of Statistical Software*. 2008. 27, 2. 1–43.
- Elhorst J. Paul. Spatial econometrics: from cross-sectional data to spatial panels. 479. 2014.
- Fontanari Claudia, Palumbo Antonella, Salvatori Chiara. Potential Output in Theory and Practice: A Revision and Update of Okun's Original Method // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2020. 54. 247–266.
- Gordon Robert J. Unemployment and Potential Output in the 1980s // *Brookings Papers on Economic Activity*. 1984. 1984, 2. 537–568.
- Hamilton James D. Why you should never use the Hodrick-Prescott filter // *Review of Economics and Statistics*. 2018. 100, 5. 831–843.
- Harris Richard, Silverstone Brian. Testing for asymmetry in Okun's law: A cross-country comparison // *Economics bulletin*. 2001. 5, 2. 1–13.
- Hobbs Bradley K. Okun's Law // *An encyclopedia of Keynesian economics*. 2013. 2-nd. 527–530.
- Ibragimov Marat, Ibragimov Rustam. Unemployment and output dynamics in CIS countries: Okun's law revisited // *Applied Economics*. 2017. 49, 34. 3453–3479.
- Knotek II Edward S. How useful is Okun's law? // *Economic Review-Federal Reserve Bank of Kansas City*. 2007. 92, 4. 73.

- Obst Thomas. Dynamic version of Okun's law in the EU15 countries – The role of delays in the unemployment-output nexus // *Scottish Journal of Political Economy*. 2022. 69, 2. 225–241.
- Okun Arthur M. Potential GNP: Its Measurement and Significance, in *The 1962 Proceedings of Business and Economic Statistics Section* // American Statistical Association. 1962.
- Perman Roger, Stephan Gaetan, Tavéra Christophe. Okun's Law—a Meta-analysis // *The Manchester School*. 2015. 83, 1. 101–126.
- Prachowny Martin F. J. Okun's Law: Theoretical Foundations and Revised Estimates // *The Review of Economics and Statistics*. 1993. 75, 2. 331–336.
- Silvapulle Paramsothy, Moosa Imad A, Silvapulle Mervyn J. Asymmetry in Okun's law // *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*. 2004. 37, 2. 353–374.
- Tatom John A. Economic growth and unemployment: a reappraisal of the conventional view // *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*. 1978. 60, Oct. 16–22.
- Virén Matti. The Okun curve is non-linear // *Economics Letters*. 2001. 70, 2. 253–257.
- Zagler Martin. Endogenous growth, efficiency wages and persistent unemployment. 1999. September 1999. (Department of Economics Working Paper Series).
- Ахундова Ольга Владимировна, Коровкин Андрей Германович, Королев Иван Борисович. Взаимосвязь динамики ВВП и безработицы: теоретический и практический анализ // *Научные труды: Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН*. 2005. 3. 471–495.
- Вакуленко Елена Сергеевна. Анализ связи между региональными рынками труда в России с использованием модели Оукена // *Прикладная эконометрика*. 2015. 4(40). 28–48.
- Вакуленко Елена Сергеевна, Гурвич Евсей Томович. Взаимосвязь ВВП, безработицы и занятости: углубленный анализ закона Оукена для России // *Вопросы экономики*. 2015. 3. 5–27.
- Казакова Мария Владимировна. Закон Оукена: теоретические основы и оценки для России // *Экономическое развитие России*. 2017. 24, 11. 27–36.
- Семитуркин Олег Николаевич, Шевелев Андрей Александрович, Квактун Мария Игоревна. Анализ факторов гетерогенности и оценка структурных уровней инфляции в регионах России // *Вопросы экономики*. 2021. 9. 51–68.