Банк России

Определение минимального размера выборки для задачи экстраполяции резервов при наличии корреляции дефолтов

Серия докладов об экономических исследованиях

№ 128 / май 2024

Генрих Пеникас

Генрих Пеникас

Банк России, Департамент исследований и прогнозирования, penikasgi@mail.cbr.ru

Автор благодарен К. Юдаевой, А. Морозову, А. Синякову, С. Селезневу (Департамент исследований и прогнозирования Банка России); Е. Румянцеву (Департамент финансовой стабильности Банка России); Р. Булатову, И. Черкасову, О. Кадревой (Департамент банковского регулирования и аналитики Банка России); Ю. Фесте за обсуждение предварительных результатов; В. Дудкину за привлечение внимания к постановке исследовательского вопроса; анонимному рецензенту за обратную связь по предварительной версии текста; С. Кожевникову (Департамент исследований и прогнозирования Банка России) за подготовку английской версии текста; К. Аникееву (Департамент исследований и прогнозирования Банка России); А. Змановскому (Департамент денежно-кредитной политики Банка России); Д. Смирнову (Департамент по связям с общественностью Банка России) за улучшение оформления текста.

Фото на обложке: `Shutterstock/FOTODOM`

Адрес: 107016, Москва, ул. Неглинная, 12, к. В
Телефон: +7 495 771-91-00
Факс: +7 495 621-64-65
Официальный сайт Банка России: www.cbr.ru

Определение минимального размера выборки для задачи экстраполяции резервов при наличии корреляции дефолтов

Генрих Пеникас

Банк России, Департамент исследований и прогнозирования,
penikasgi@mail.cbr.ru

30 мая 2024 г.

Аннотация

В 2016 г. Банк России разработал два указания о том, как по ограниченной выборке кредитов сделать вывод о достаточном или недостаточном уровне резервов на восстановление по ссудам в портфеле однородных ссуд и о достаточности собственных средств банка.

Действующая процедура оценки достаточности резервов предполагает рассмотрение, как правило, части договоров из всего портфеля и перенос (*экстраполяцию*) оценки резервов с этой части на весь портфель. При этом в действующем подходе при определении минимального размера выборки предполагается отсутствие корреляции дефолтов.

Вклад автора состоит в применении известных, но редко рассматриваемых свойств распределения суммы коррелированных событий (исходов) Бернулли к новой задаче, а именно к экстраполяции резервов, в которой ранее не предполагалось наличие корреляции дефолтов. В результате показано, что наличие такой корреляции требует брать минимальную выборку ссуд большего размера, чем при ее отсутствии. В частности, продемонстрировано, как минимальный размер выборки зависит от абсолютной и относительной разниц долей дефолтов (резервов, нарушений) в двух выборках, от требуемых уровней значимости и статистической мощности.

Ключевые слова: кредитный риск, вероятность дефолта, коррелированные исходы Бернулли.

Коды JEL: C58, E58, G18, G21, G28.

1. Введение

1.1. Контекст и цель исследования

В 2016–2017 гг. в практике банковского надзора Банка России появился подход, повышающий эффективность надзора, экономя ресурсы на проверку однотипных договоров: см. основной нормативно-правовой акт Банк России (2017b), проект смежного с ним документа Банк России (2017a) и описание внедрения подхода в статье (Поздышев, 2017, стр. 14, 17).

Рост эффективности надзора достигается за счет рассмотрения только части портфеля ссуд. После проверки обоснованной актом части ссуд выводы о достаточности или недостаточности резервов *экстраполируются* (переносятся, обобщаются) на весь портфель. Такой перенос правомерен, когда портфель состоит из *однородных* ссуд. Критерии однородности поясним далее в подразделе 1.2.

В основе этого подхода экстраполяции резервов лежат принципы теории вероятности. Их мы подробнее рассмотрим в обзоре литературы в разделе 2. Суть этих принципов сводится к решению задачи определения минимально достаточного размера выборки для обоснованного вывода о том, можно ли отвергнуть статистическую гипотезу. Иными словами, если бы мы располагали знанием обо всех объектах (ссудах), то мы могли бы однозначно (без статистической погрешности) сделать вывод о том, какими должны быть резервы или нужно ли существующий размер резервов доформировать, а может быть, иногда и снижать. Если же рассмотреть лишь часть договоров, то ответить на вопрос о достаточности резервов можно только с некоторой статистической погрешностью. Упрощенно, если взять только один из, например, тысячи договоров, то ошибиться можно значительно (конечно, не в тысячу раз, но значительно в терминах величины резерва). Поэтому *исходя из распределения* интересующего признака — в нашем случае исходя из величины кредитного риска и ее отражения в показателе резервов (сформированных и требуемых), — в теории вероятностей обосновывается, сколько договоров из тысячи нужно рассмотреть, чтобы возникающая погрешность (ошибка) была некритичной (степень критичности на самом деле тоже можно варьировать, но к обсуждению этого расширения мы перейдем только в подразделе 7.2).

Указанный выше подход Банка России по экстраполяции резервов является характерным примером более общей мировой практики аудита. В рамках нее типичным является начинать проверку лишь с части объектов (договоров, сделок). При наличии проблем или отклонений от ожиданий проверяющих выборку рассматриваемых объектов расширяют вплоть до полного охвата.

Несмотря на глобально признанный масштаб задачи экстраполяции (в случае Банка России — резервов), описанный подход уместен только для части случаев. Ключевым в описании выше является *предположение о распределении* признака. Все случаи, встреченные автором и описанные в разделе обзора литературы, предполагают *нормальность* распределения (то, что данные распределены куполообразно по каноническому распределению Карла Фридриха Гаусса). Действительно, распределение принимает нормальный (гауссовский, куполообразный) вид вследствие реализации закона больших чисел (когда мы многократно повторяем наш условно называемый эксперимент). Однако это верно, только когда рассматриваемые объекты (исходы) *независимы*.

Когда для рассматриваемых объектов характерна взаимосвязь (это необязательно должна быть юридическая связь через отношения контроля или собственности; достаточно общей подверженности одним и тем же макроэкономическим факторам; например, преприятия малого бизнеса из-за малого масштаба своей деятельности существенно менее надежны как заемщики, чем крупнейшие предприятия страны), тогда даже под действием закона больших чисел распределение суммы событий не будет гауссовским (одномодальным), а будет иметь две моды (два купола). Такое принципиальное изменение формы распределения существенным образом меняет выводы о минимально достаточном размере выборки. Предваряя выводы работы, укажем, что наличие такой положительной взаимосвязи между объектами значимо увеличивает минимально достаточный размер выборки.

Поэтому **целью** настоящей работы является обоснование того, какой минимальный размер выборки достаточен при разных комбинациях параметров как среднего уровня резервов (дефолтов), так и корреляции дефолтов. Для решения задачи будут использованы известные свойства распределения бернуллиевских случайных величин с коррелированными исходами. При этом новой является сама постановка задачи. Полученные выводы будут полезны в практике как надзора Банка России, так и внутреннего и внешнего аудита в коммерческих организациях и банках.

1.2. Критерии однородности (стабильности и гранулированности) портфеля

Задачу экстраполяции резервов уместно обсуждать только при наличии однородного портфеля ссуд. Иначе мы столкнемся с типичной проблемой сравнения отношений (дробей) для двух выборок, когда в одном случае среднее по выборке считают как среднее всех дробей, а в другом — как отношение суммы всех числителей к сумме всех знаменателей[1].

В настоящей работе предполагаем, что портфель рассматриваемых ссуд уже однороден. Задача подтверждения или при необходимости пересмотра критериев такой однородности не ставилась в рамках настоящего исследования, но может быть предметом отдельной работы. Для цели текущего исследования ограничимся ссылками на то, какие портфели предполагались однородными в рамках обсуждаемого контекста, а именно в документах Банка России: Банк России (2017a,b).

Все критерии можно разделить на две большие группы, предполагающие то, какие кредиты нужно исключать из рассмотрения и какие нужно включить в рассмотрение. Критериями однородности являются первые, но упомянем также и вторые, поскольку они важны для выполнения принципа полноты.

В документах можно встретить следующие критерии однородности (стабильности и гранулированности), при выполнении которых уместно обсуждать и применять принцип *экстраполяции резервов*:

1. Исключаются особенно крупные ссуды, по размеру превышающие 5% капитала (Банк России, 2017b, п. 1.7).

2. Исключаются особенно мелкие ссуды — по размеру меньше 1 тыс. руб. (Банк России, 2017a, п. 2.2).

3. Исключаются ссуды со 100%-ным резервом (Банк России, 2017b, п. 2.3.2), (Банк России, 2017a, п. 2.2).

4. Ссуды должны полно отражать структуру кредитного риска (Банк России, 2017b, п. 2.3.8), что равносильно тому, что они должны быть однородны по кредитному риску (Банк России, 2017a, п. 2). В таком критерии заложен сложный принцип замкнутого цикла. Предполагая, что ссуды однородны по кредитному риску, ожидаем, что такая оценка риска верна или единообразно смещена. Иначе если искажения в оценке кредитного риска не пропорциональны по кредитам (например, равного размера), то получается, что они неоднородны. Значит, их нельзя было рассматривать вместе. Тогда полученная оценка искажения некорректна. В таком замкнутом цикле приходится принимать решения, какую из точек цикла считать отправной. Как правило, оценка банка берется за базовую. Использование иных отправных точек и иной подход к пересчету оценок риска могут стать предметом отдельного исследования.

5. Ссуды должны быть подобны (однородны, иметь близкие значения) в рамках таких групп, разрезов портфеля, как срочность просрочки (Банк России, 2017a, п. 2.4), категории кредита: ипотека, авто, потребительские, иные (Банк России, 2017b, п. 2.3.5.1).

6. Ссуды физическим лицам и ссуды малому бизнесу (ИП/МСП) нельзя считать однородными (Банк России, 2017b, п. 2.3.5.4), (Банк России, 2017a, п. 2.6).

При том что портфель должен быть однороден, в документе (Банк России, 2017b, п. 1.7) также рекомендуется рассмотреть большую часть всех ссуд, то есть чтобы суммарный размер рассмотренных ссуд превышал 70% всех активов. При невыполнении необходимо переходить к полному охвату и рассмотрению всех ссуд, критерии однородности будут давать малые портфели или по сумме не охватят большую часть всех активов.

[1]Отдельно благодарю Р. Булатова, И. Черкасова, О. Кадреву (Департамент банковского регулирования и аналитики Банка России) за рекомендацию осветить критерии однородности портфеля ссуд.

1.3. Структура работы

Для описания того, как были получены основные результаты исследования, работа структурирована следующим образом. В разделе 2 представлен обзор литературы о том, как задача определения минимального размера выборки уже решалась в разных сферах деятельности — от медицины до финансов. В разделе 3 приведен пример данных, чтобы показать, почему важно учесть корреляцию дефолтов при аудите кредитного портфеля. В разделе 4 изложена методология того, как непараметрически (не через аналитический вывод формул) будет получен ответ на поставленный вопрос о том, какой минимальный размер выборки требуется при разных комбинациях параметров. Основные результаты даны в разделе 5. В разделе 6 будет показано, какие из входящих параметров в большей степени влияют на получаемые величины минимального размера выборки. Заключение и особенности применения полученных результатов обсудим в последнем разделе 7.

2. Обзор литературы

Задача определения минимального размера выборки решается в социологии, математической статистике, медицине, финансовых и ИТ-проверках (аудитах). Опишем подробнее полезные результаты из перечисленных областей для задачи экстраполяции резервов.

2.1. Социология

Если нас интересует вопрос, сколько наблюдений (объектов, договоров) достаточно рассмотреть, чтобы быть уверенными в значении интересующего параметра, то нам достаточно взять типичных представителей из выборки. Таким образом, возникает задача формирования *репрезентативной выборки*. Особую актуальность такая задача приобретает при проведении социологических опросов и исследований, см., например, Давыдов (1990); Новиков (2001).

Для формирования репрезентативной выборки в социологии используется несколько подходов. Базовым является *случайная* выборка, когда пробуют собрать данные о каждом k-ом человеке (о десятом, сотом и тому подобное). Поскольку мнения людей могут существенно зависеть от крупных наблюдаемых факторов (пол, возраст, регион, тип населенного пункта, уровень доходов), то пробуют рассматривать в первую очередь указанные факторы, а случайно уже выбирать внутри отобранных подгрупп (страт). Так возникает задача *стратифицированной* выборки. Если рассматриваются два фактора (регион и тип населенного пункта), то выборка будет называться *двухуровневой случайной стратифицированной*. Если эти два фактора в достаточной мере различают людей, то полученная выборка из всех людей (из генеральной совокупности) будет *репрезентативной*, то есть будет отражать разнообразие мнений *всех* людей.

Поэтому при переносе социологического подхода на финансовые задачи уместным может быть выделение финансовых страт (по отраслям и регионам заемщиков, например). Тогда полученная выборка будет репрезентативна. Если в ней будет обнаружено недоформирование резервов на x процентов, в силу репрезентативности выборки это означает, что для всего рассматриваемого портфеля заемщиков нужно доформировать резервы на те же x процентов.

2.2. Математическая статистика

Определение минимального размера выборки для проверки статистических гипотез кажется достаточно хорошо изученной темой, особенно для переменных в виде пропорций (долей p), см., например, Demidenko (2007); (Hogg et al., 2015, p. 327, формула 7.4-3); Bush (2015); Raos (2021).

Базовым решением является поиск такого размера выборки, чтобы стандартная ошибка оцениваемой пропорции (доли) $\sqrt{p\cdot(1-p)/n}$ не превысила некоторую погрешность ϵ. Тогда, беря консервативно $\hat{p}=0.5$ и $\epsilon=0.05$, минимальная выборка равна 100 наблюдениям (Raos, 2021, p. 294):

$$n \geq \frac{p\cdot(1-p)}{\epsilon^2} = \frac{0.5\cdot(1-0.5)}{0.05^2} \approx 100, \qquad (1)$$

где n — размер выборки (число наблюдений/объектов); p — **истинное** значение доли.

Однако такой подход не учитывает распределения доли (не учитывает доверительного интервала около нее). Тогда в предположении нормальной аппроксимации в формулу (1) добавляется квантиль гауссовского распределения $N_{\alpha/2}$ для проверки гипотезы, что $\hat{p} \geq p$:

$$\hat{p} \geq p + N_{\alpha/2} \cdot \frac{p}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

где $N_{\alpha/2}$ — квантиль нормального распределения на уровне значимости α при проверке *двусторонней* гипотезы о неравенстве параметров (для 95% уровня доверия $(0.95 = 1-\alpha)$: $N_{0.025} = 1.96$) (Raos, 2021, p. 294); p — **истинное** значение доли (для консервативных оценок минимального размера выборки берут значение 0.5, которое требует максимального размера выборки при прочих равных); $\hat{p}$ — **выборочное** значение доли, которое можно отличить от истинного на выборке размера n и при уровне значимости α.

Из формулы (2) следует базовое свойство статистических гипотез, что увеличение выборки n снижает стандартную ошибку и позволяет доказать наличие статистически значимого отличия (проверить поставленную исследовательскую гипотезу) почти всегда, хотя на самом деле различий может и не быть. Из-за данного негативного свойства автор в работе Demidenko (2016) рекомендует вместо полагания на t-статистики использовать показатель ROC, или, как он его называет, *d-value* (вместо p-value).

В материале (Raos, 2021, с. 291–297, разделы 16.1–16.2) описано, как определить минимальный размер выборки для достоверной оценки доли p, а также перечислены ограничения такого подхода. Интересно обратить внимание на рисунок 16.2. Он иллюстрирует логику определения минимального размера выборки через создание искусственных данных. Допустим, у нас есть две доли: истинная (50%) и выборочная (60%). Задача состоит в том, чтобы определить, на каком числе наблюдений можно достоверно утверждать, что выборочная доля отличается от истинной. Под достоверностью понимается, что доверительный интервал (ДИ, CI) для выборочной доли не должен включать истинное значение в большинстве случаев. Такое большинство случаев иначе называют *мощностью* теста (statistical power). Как указано в источнике, распространенным порогом мощности теста является значение в 80%. Тогда, по сути, необходимо использовать следующую формулу (3):

$$n \geq (N_{1-\alpha/2} + N_{1-\gamma})^2 \cdot \frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{(\hat{p}-p)^2} = (1.96 + 0.84)^2 \cdot \frac{0.5 \cdot (1-0.5)}{(0.5-0.6)^2} \approx 200, \tag{3}$$

где $1-\gamma$ — требуемая мощность теста.

После обсуждения рисунка 16.2 указывается, что такой подход недостаточен, поскольку не учитывает разброс истинного значения доли. Поэтому автор из Raos (2021) рекомендует, чтобы в большинстве случаев нижняя граница ДИ (CI_low) для выборочного значения доли не просто не включала истинное (точечное, среднее) значение доли, а чтобы она превосходила верхнюю границу ДИ (CI_up) для распределения истинного значения доли.

При этом в материале Raos (2021) делается акцент на проблеме того, что выборочное значение не известно, пока его не получили. Тогда получается замкнутый цикл: минимальный размер выборки зависит от того, против какого выборочного значения мы сверяем истинное; а само выборочное значение определяется тем, на какой выборке (в том числе на выборке какого размера) его измерить.

В приложении к задаче экстраполяции резервов описанный выше подход применим следующим образом. Допустим, рассматриваемый банк заявил значение резервов как долю портфеля. При этом в сопоставимых сегментах других банков значение резервов (доли) значимо отличается. Например, оно существенно выше, чем у данного банка, то есть есть риск, что рассматриваемый банк занизил резерв. Тогда задача экстраполяции состоит в том, чтобы определить, сколько договоров нужно случайно отобрать, чтобы по ним достоверно подтвердить, что доля резервов, заявленная конкретным банком, отличается (меньше), чем в иных банках, и это обосновано. Тогда доля резервов в конкретном банке — это истинная доля p в рамках более общей постановки задачи выше, а доля резервов в иных банках — это выборочная доля $\hat{p}$. Если подтверждаем, что обосновано ниже, то доформирования резервов не требуется. Если иначе — требуется.

2.3. *Медицинские исследования*

В медицинских исследованиях определение минимального размера выборки — это основа клинических испытаний лекарств (Lachin, 2011, pp. 85–118, Ch. 3). В ассоциации английских клиник (University Hospitals Bristol NHS Foundation Trust) значения минимального числа пациентов сформулированы в виде рекомендаций (UHBristol, 2009, p. 2).

Аналогично описанию из Raos (2021), когда важно сравнивать границы двух доверительных интервалов, а не одного (см. обсуждение для формулы (3) выше), в практике медицинских исследований вводится понятие *t-value*, когда для получения достоверного результата рекомендуют брать выборку в 2–3 раза больше, чем следующую просто из одной t-статистики, см. подробности в (Kulinskaya et al., 2008, pp. 4–5).

Полезным может быть готовый расчетный модуль по определению минимального размера выборки. Он основан на работе Demidenko (2007) и находится в открытом доступе:
`https://www.dartmouth.edu/~eugened/power-samplesize.php`.

В следующем материале заявляется, что аналогичный модуль доступен в коде R:
`https://search.r-project.org/CRAN/refmans/WebPower/html/wp.logistic.html`.

2.4. *Финансовый аудит*

Проведение финансового аудита, ИТ-аудита финансовых компаний или финансовых расследований (forensic) также полностью основано на классической задаче математической статистики об определении минимального размера выборки.

Примечательно, что для данного вопроса существует отдельный стандарт № 530 «Аудиторская выборка», Минфин России (2021) (выдержки из него приведены в приложении A.1). Этот стандарт носит общий характер, описывая принципы, которым такая выборка должна отвечать. Однако конкретное число договоров к рассмотрению определяет каждый аудитор. Здесь могут быть использованы эвристические правила Стерджеса (Herbert Arthur Sturges) из формулы (4) или Бенфорда из формулы (5). Последнюю процедуру не стоит путать с законом Ньюкомба — Бенфорда, хотя фамилия Бенфорда соответствует одному человеку и этот закон также применяют в финансовом аудите для выявления мошенничеств, см. Nigrini (2012).

$$n = 1 + [3,322 \cdot log_{10}(N)], \tag{4}$$

где «n — количество интервалов; N — генеральная совокупность; log_{10} — десятичный логарифм; [...] — целая часть числа» (Зверев, 2018, стр. 45).

$$N = [2^{n-1}], \tag{5}$$

где «N — минимальное количество элементов совокупности; n — требуемое количество страт; [...] — операция выделения целой части» (Зверев and Никифоров, 2019, стр. 73).

Интересно, что 15 лет назад в США функционировала отдельная отраслевая рабочая группа для унификации подходов к определению минимального размера аудиторской выборки (2008 Audit Sampling Guide Task Force). Среди результатов рабочей группы примечателен отчет Stewart (2012), в котором автор рассматривал минимальные аудиторские выборки при разных распределениях. Концептуально в данной работе будет сделано аналогичное: минимальный размер выборки будет рассмотрен для распределения без корреляции исходов (дефолтов) и с такой корреляцией.

Для финансового аудита чаще, чем для медицины или социологии, встречаются рекомендуемые конкретные цифровые значения минимальных выборок, см. (AICPA, 1999, pp. 26–29, 51), (NAO, 2001, pp. 9, 19).

Указание № 4466-У Банк России (2017b) и проект указания Банк России (2017a). Экстраполяция резервов — это частный случай задачи финансового аудита. Существуют два документа Банка России (утвержденное указание Банк России (2017b) и проект Банк России (2017a)), которые близки друг другу по концепции, но имеют отличия. Поясним как общую схему, так и указанные различия далее.

Оба документа были разработаны в 2016 г.: один (№ 4466-У) рассматривал оценку достаточности собственных средств (имущества) банка; второй (проект) — достаточность резервов в портфелях однородных ссуд (ПОС). Логика обоих документов близка. Вначале предлагается взять *случайную* выборку из 100 договоров (Банк России, 2017b, п. 2.3.9.1), (Банк России, 2017a, п. 3.7). Это предложение соответствует консервативной рекомендации из математической статистики (см. формулу (1) из (Raos, 2021, p. 294)).

Затем нужно проверить каждый договор, сформировать перечень нарушений и процент от суммы договора для доформирования резерва из-за нарушения. По каждому договору берется наибольшее относительное по размеру нарушение. По таким нарушениям считается среднее нарушение для выборки. Здесь Указание № 4466-У и проект различаются в том, что в Указании № 4466-У рассчитывается среднее нарушение, а в проекте предлагается считать средневзвешенное по сумме договора нарушение, сравните формулы (6) и (7):

$$S_{DRez} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(DRez_i - \overline{DRez})^2 \cdot OD_i}{\sum_{i=1}^{n} OD_i}}, \tag{6}$$

где OD_i — «сумма основного долга по i-ой ссуде на дату оценки» (Банк России, 2017a, п. 3.9).

$$S_{DRez} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(DRez_i - \overline{DRez})^2}, \tag{7}$$

где n — «количество ссуд в выборке» (Банк России, 2017b, п. 2.3.9.2).

По таблице из приложения к указаниям определяется, нужно ли взять дополнительное число договоров к проверке. Если требуется, то по ним также проводится проверка и среднее нарушение уже пересчитывается по расширенной выборке. Если не требуется, то сохраняется оценка среднего нарушения по первичной выборке. Далее строится доверительный интервал *в предположении нормального распределения* (то есть в отсутствие корреляции дефолтов) для размера нарушения со средним, равном выборочному. Берется правая граница полученного (расчетного) доверительного интервала, и уже данная величина применяется ко всей выборке. Например, если среднее нарушение составило 1%, то приблизительно на выбранном квантиле, упрощенно равным двойке (в Указании № 4466-У и в проекте используются разные уровни и, соответственно, разные множители: 1.96 и 1.65), получаем, что для всего портфеля нужно доформировать резервы на (1 п.п. х 2) = 2 процентных пункта.

Формальная последовательность вычисления дооценки резервов по Указанию № 4466-У и по проекту сведена для удобства читателя в Приложении А.2.

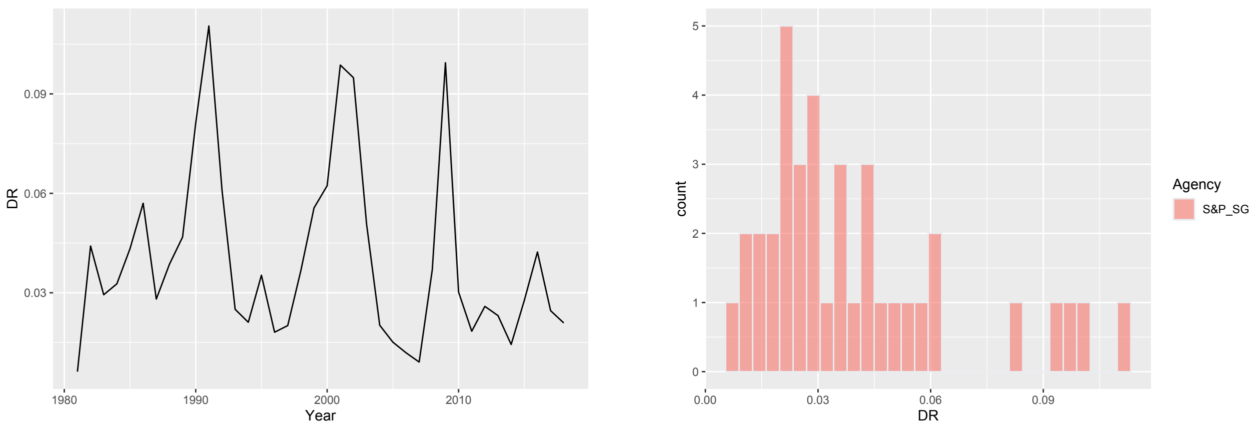
2.5. Выводы из литературы

Задача определения минимального размера выборки хорошо известна и применяется в разных сферах деятельности. Однако до настоящей работы она рассматривалась только в предположении отсутствия корреляции исходов (дефолтов, нарушений). Целью настоящей работы является обоснование минимального размера выборки при наличии корреляции.

3. Данные

Чтобы проиллюстрировать важность корреляции дефолтов, обратимся к открытым данным по заемщикам с рейтингами спекулятивного уровня (speculative grade, SG) одного из международных рейтинговых агентств на рисунке 1. За последние 40 лет (до начала пандемии) динамика доли дефолтов (по вертикали) демонстрирует практически регулярный цикл (левая часть рисунка). Однако если рассмотреть распределение доли дефолтов в отрыве от временного измерения, то на лицо яркая бимодальность распределения (правая часть рисунка). Это значит, что доля дефолтов скорее принимает либо малые, либо большие значения. Такое распределение не соответствует предпосылки гауссовского (нормального, куполообразного) распределения для классической схемы Бернулли, когда есть последовательность *независимых* наблюдений, каждое из которых может принять значения либо 0, либо 1. Причиной отличия от гауссовского распределения является *положительная* корреляция исходов (дефолтов в случае рейтингового агентства). В гауссовском распределении предполагается отсутствие такой корреляции в схеме Бернулли.

Рис. 1: Пример корреляции дефолтов в данных одного из международных кредитных рейтинговых агентств



Источник: (S&P Global Ratings, 2019, p. 3).

Чтобы определить корреляцию дефолтов по временному ряду данных, достаточно сравнить фактическую дисперсию доли ($Var(DR)$) с дисперсией ($\overline{DR} \cdot (1 - \overline{DR})$) в отсутствие корреляции исходов (дефолтов), см. формулу (8) (формулу можно вывести из теоретико-вероятностных свойств распределения случайной величины, представляющей собой сумму коррелированных исходов Бернулли; пример непараметрического получения того же результата описан в работе Kruppa et al. (2018)).

$$\rho = \frac{Var(DR)}{\overline{DR} \cdot (1 - \overline{DR})}, \tag{8}$$

где $\overline{DR}$ – средняя историческая доля дефолтов; $Var(DR)$ – ее дисперсия.

По данным одного из международных кредитных рейтинговых агентств с рисунка 1, получаем, что средняя историческая доля дефолтов ($\overline{DR}$) равна 4%, ее дисперсия ($Var(DR)$) — 0.07%. Тогда корреляция дефолтов (ρ) равна примерно 2%. Несмотря на кажущееся малое значение корреляции дефолтов, она существенно увеличивает разброс значений наблюдаемой (реализованной) доли дефолтов (DR) и ведет к появлению второй моды (купола, горба) в распределении DR; оно становится бимодальным.

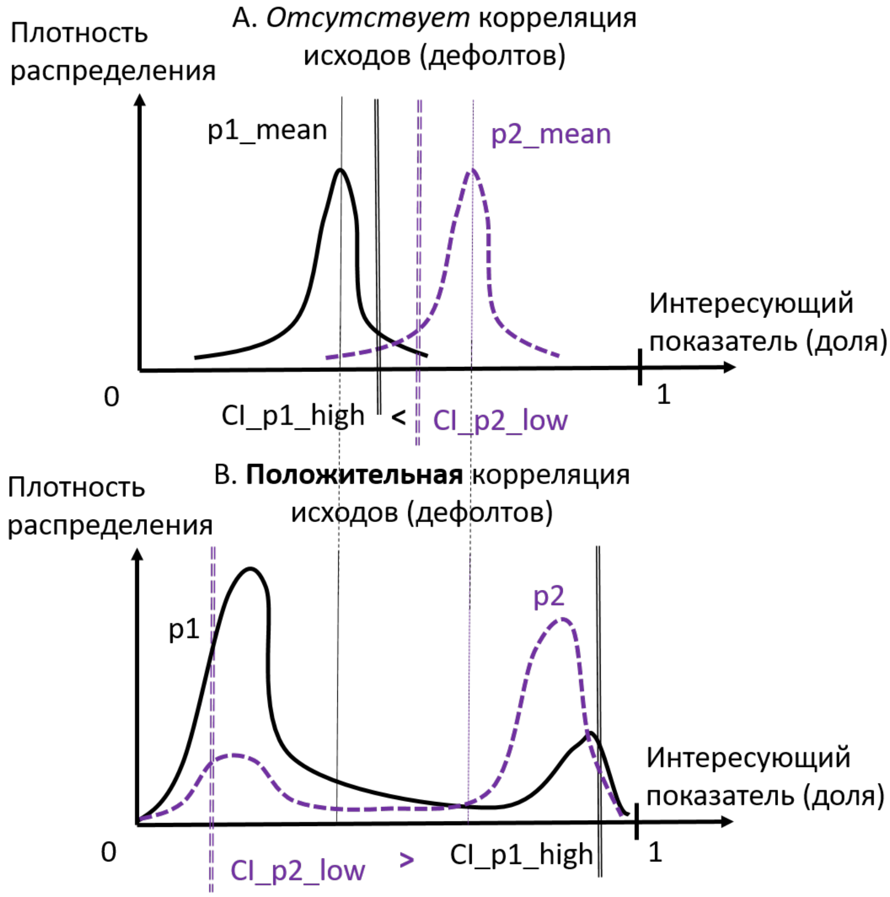
4. Методология

Напомним, что суть процедуры по определению минимального размера выборки состоит в том, чтобы построить доверительные интервалы для двух интересующих (сравниваемых) значений доли (резервов, дефолтов, нарушений), например, для $p1$ и $p2$. Минимально достаточной называем такую выборку, когда большая часть доверительных интервалов не будет пересекаться.

При отсутствии корреляции дефолтов описанный принцип схематически представлен на части A рисунка 2. Однако если имеет место положительная корреляция дефолтов, как в примере с данными международного кредитного рейтингового агентства в разделе 3, то рассматриваемые распределения становятся бимодальными. На части B приведен пример с корреляцией дефолтов для обоих сравниваемых распределений, значимо близкой к единице, к +100% (тогда практически все реализации доли — это нули или единицы и промежуточных значений почти не наблюдается).

Тогда если на одном размере выборки можно было достоверно утверждать, что $p1$ статистически значимо отличается от $p2$ *при отсутствии корреляции дефолтов* в случае A, то при ее наличии такой вывод будет уже неустойчив в случае B. На том же размере выборки *при наличии корреляции дефолтов* (в случае B) можно подтвердить гипотезу только о значительно большем различии между параметрами, чем различие при ее отсутствии (в случае А). Для поставленной цели исследования по определению минимального размера выборки при наличии корреляции дефолтов можно ожидать, что *с ростом корреляции дефолтов требуется больше выборка для сравнения одних и тех же средних значений доли (резервов, нарушений).*

Рис. 2: Концепция теста: наличие корреляции дефолтов увеличивает разброс и требует большей минимальной выборки



Для достижения поставленной цели будем использовать непараметрический подход по созданию искусственных данных. Для иллюстрации рассмотрим:

- Два базовых значения $p1$ (PD_true), против которых проверяем гипотезу: 10 и 50%. Можно понимать это как значения, заявляемые **банком**, данные которого проверяются.

- Два расхождения (отклонения) dif от базового значения до альтернативного: 5 и 10%. Соответственно, *альтернативные* доли $p2$ (PD_sample) равны в зависимости от базового значения доли: 15, 20 и 55, 60%. Расхождение можно понимать как средний размер выявленного нарушения. Альтернативная доля $p2$ — это полная ставка резерва, которую должен сформировать банк с учетом выявленных нарушений, или это может быть ставка, характерная для отрасли или сегмента заемщиков.

- Четыре значения корреляции дефолтов ρ: 0, 2.5, 5, 7.5%. Рассматриваем такие невысокие значения корреляции по двум причинам. Во-первых, их мы видели в фактических данных в разделе 3. Во-вторых, при больших значениях корреляции задача не имеет решения. Представьте себе крайний случай, когда корреляция дефолтов равна 100%. Тогда правый квантиль распределения с меньшим значением средней доли равен 1, а левый квантиль распределения с большим — 0. Они будут всегда накладываться друг на друга. Это значит, что при совершенной корреляции дефолтов нужно рассматривать все ссуды.

Для создания искусственных данных и определения по ним достаточного минимального размера выборки будем использовать следующий алгоритм:

1. Независимо создаем два портфеля с числом заемщиков N_loans. Это дает нам два значения (две реализации) доли дефолтов DR.

$$DR = \frac{\sum_{i=1}^{N} D_i}{N}, \tag{9}$$

где D_i — индикатор дефолта (может быть 0 или 1) для i-ого заемщика ($i = \overline{1;N}$);

- Для генерации корреляции дефолтов используем подход из работы Lunn and Davies (1998), представленный формулой (10):

$$D_i = U_i \cdot Y + (1 - U_i) \cdot X_i, \tag{10}$$

где $Y \sim Bin(1, PD)$ — это биномиально (Bin) распределенный системный (общий) фактор для одной реализации, где единица реализуется с вероятностью PD и ноль иначе; $X_i \sim Bin(1, PD)$ — это тоже биномиально распределенная, но независимая от Y случайная величина, характеризующая индивидуальный (идиосинкратический) фактор; $U_i \sim Bin(1, \rho)$ — это мера вклада системного фактора в дефолтность заемщика, тоже биномиально распределена, но с параметром корреляции дефолтов ρ.

2. Повторяем операцию (1) по созданию портфелей N_portf раз. Это дает нам два распределения DR. В одном распределении — *по данным банка* — берем квантиль сверху (CI_up, здесь и далее приводим обозначения, как они следуют в коде в Приложении), во втором — *альтернативном (по отрасли, по первой выборке)* — снизу (CI_low). Нас будут интересовать ситуации, когда верхний квантиль первого распределения ниже нижнего квантиля второго ($CI\_low \geq CI\_up$).

3. Повторяем итерацию (2) N_ci раз, чтобы обеспечить выполнение условия (соотношения квантилей) в не менее чем $1 - \gamma$ раз. Например, берем $\gamma = 0.2$ для обеспечения выполнения требования к мощности теста (выполнения условия в 80% случаев, ДИ).

4. Проводим итерации (1–3), поступательно увеличивая размер выборки N_sample (N_loans). Останавливаемся при достижении заданной мощности теста.

5. Размер выборки, соответствующей остановке алгоритма, является искомым минимальным числом наблюдений.

Воспроизводимый код доступен в Приложении А.4. Приведенный код позволяет получить оценку минимально достаточной выборки для любых интересующих параметров, не ограниченных перечисленными выше, *если решение задачи имеет место (то есть для корреляции событий:* $0 \leq \rho << 1$*).*

5. Основные выводы

Результаты исследования представим поэтапно. Вначале поясним логику работы алгоритма на одном примере в подразделе 5.1, затем обобщим выводы для широкого спектра комбинаций параметров в подразделе 5.2.

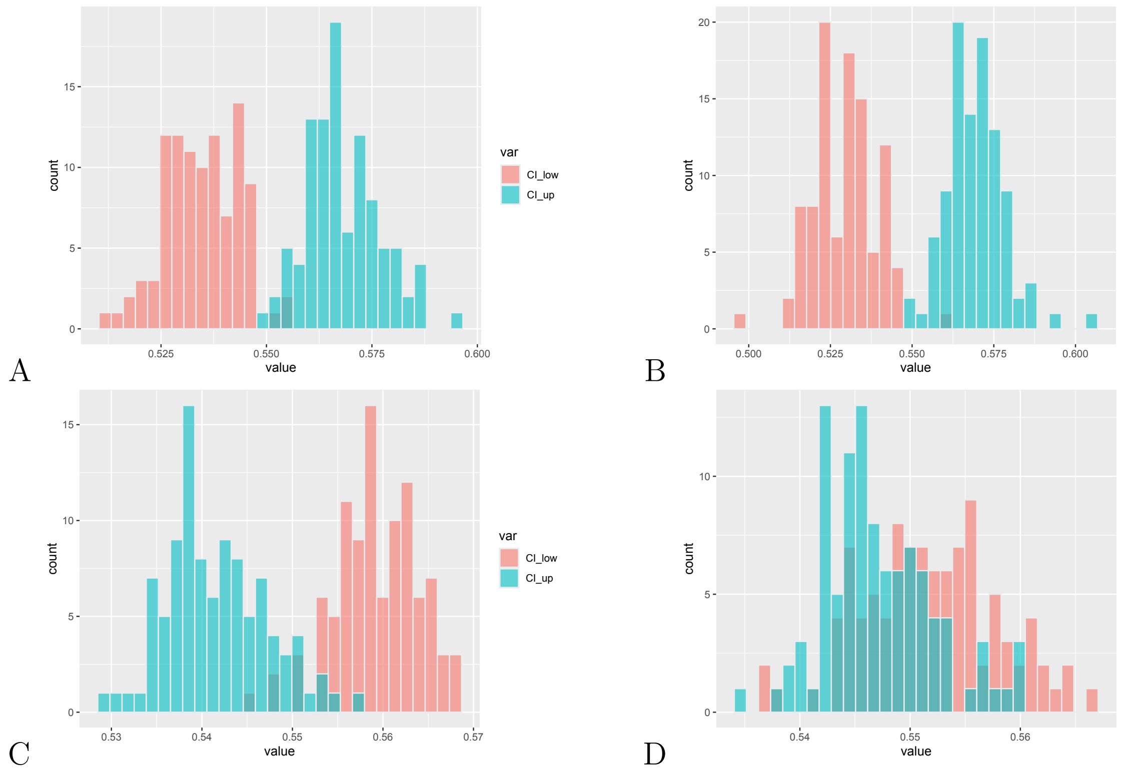
5.1. Обсуждение одного примера для иллюстрации

Продемонструем логику работы алгоритма по определению минимально достаточного размера выборки на рисунке 3. На рисунках приведены две гистограммы распределения *квантилей* (не самих долей дефолта): красное распределение — это нижний квантиль (CI_low) большего значения $p1$;

зеленое — верхний квантиль (CI_up) меньшего значения $p2$. Целевая ситуация — когда зеленое распределение находится слева, красное — справа. В наибольшей степени такой ситуации соответствует рисунок C, где корреляции дефолтов не предполагается, а минимальный размер выборки равен 500 наблюдениям. Здесь 98% доверительных интервалов не перекрывается (верхний квантиль распределения с меньшим значением доли в 98% случаев находится левее нижнего квантиля распределения с большим значением).

Если выборку уменьшить до 200, из части C переходим в A, где распределения расположены с точностью до наоборот, то есть все доверительные интервалы полностью перекрываются. Значит, при рассматриваемых показателях долей ($p1 = 50\%, p2 = 60\%$) выборки в 200 наблюдениях недостаточно, чтобы утверждать, что показатели статистически различаются. Для практики это означает, что после рассмотрения 200 договоров банк не может утверждать, что именно для него резерв должен быть 50%, когда для отрасли (или для подвыборки) он равен в среднем 60%. Тогда обоснованным будет требовать от банка доформирования резервов в среднем на 10 п.п. к имеющемуся среднему уровню в 50%.

Рис. 3: Графическая иллюстрация найденного минимального размера выборки



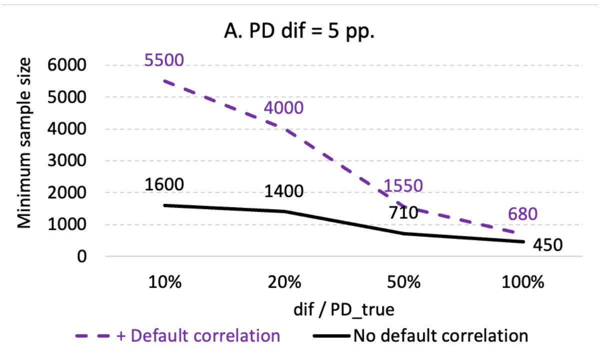
Примечание. $p1 = PD\_true = 50\%$ (зеленые столбцы, здесь берем верхний квантиль CI_up), $p2 = PD\_sample = 60\%$ (красные столбцы, здесь берем нижний квантиль CI_low).
Размер выборки по подрисункам: A, C – $N = 200$; B, D – $N = 500$.
Мощность теста по подрисункам: A – 0%; B – 0%; C – 98%; D – 69%
(приемлемый результат, когда мощность выше 80%).

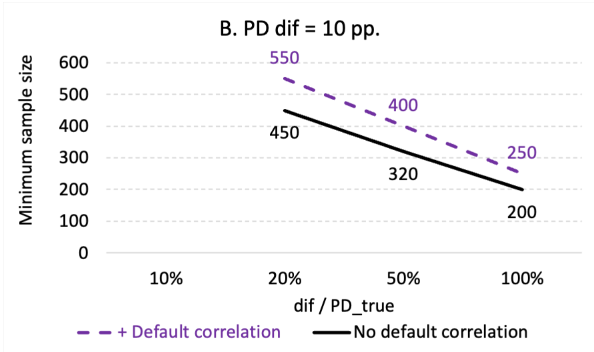
Если же в рассматриваемой ситуации C предположить, что имеет место корреляция дефолтов, аналогичная по масштабу как для данных международного кредитного рейтингового агентства из раздела 3 ($\rho = 2.5\%$), то переходим из ситуации C в D. Здесь ситуация ухудшается, правда, не критично. Целевое соотношение доверительных интервалов выполняется только для 69% случаев, что уже меньше принятой целевой мощности в 80% (см. раздел 2), то есть выборки в 500 наблюдений недостаточно для обоснованной проверки гипотезы о соотношении долей $p1$ и $p2$. Наперед скажем, что требование мощности в 80% при такой комбинации параметров будет выполнено при выборке в 550 наблюдений (см. таблицу 1 в Приложении).

5.2. *Обобщенные выводы*

Рисунок 4 наглядно сводит полученные результаты. По вертикали представлен минимально достаточный размер выборки, по горизонтали — отношение отклонения (расхождения) dif к величине доли (резерва) в выборке банка $p1$ (PD_true). Левая часть A рисунка содержит результаты для абсолютного отклонения dif в 5 п.п., правая часть B — для отклонения в 10 процентных пунктов. Линия с пунктиром соответствует предположению о наличии корреляции дефолтов, равной 2.5% в обоих распределениях; сплошная линия предполагает отсутствие корреляции дефолтов. Подробности для большего спектра корреляций дефолта (включая комбинации ее наличия в одной выборке и отсутствия в другой) приведены в таблице 1 в Приложении.

Рис. 4: Минимальный размер выборки снижается с ростом отношения расхождения к оценке доли (резерва) со стороны банка





Примечание. Расчеты авторов, подробности доступны в Приложении, см. таблицу 1.

Таким образом, по рисунку 4 можно сделать следующие ключевые выводы. Минимальный размер выборки будет меньше:

- чем больше в *абсолютном* выражении расхождение между проверяемыми долями (dif). Причем если такое расхождение мало относительно доли, заявляемой банком (например, составляет 20%), то *экономия* выборки существенно выше, чем для высокой относительной доли (например, для 100%), а именно сравните 4000 и 550 против 680 к 250 (при наличии корреляции);
- чем больше *относительное* расхождение между долями (dif/PD_true);
- чем ниже корреляция дефолтов. Причем эффект более значим (требуется меньше наблюдений) при большом *относительном* расхождении, чем при малом (движение по горизонтальной оси вправо); а также при большем *абсолютном* расхождении (переход от подрисунка A к B).

6. Проверка устойчивости результатов

В рассматриваемых результатах использовался ряд неизменных параметров:

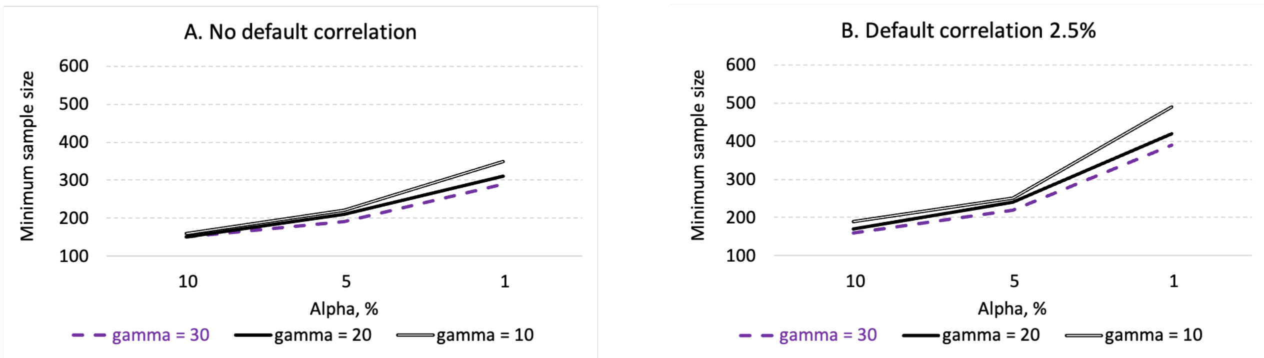
- α — уровень значимости. Рассматривается стандартная величина в 5%. Тогда для двустороннего доверительного интервала таким интервалом отсекается примерно по два наблюдения слева и справа;
- $1-\gamma$ — мощность теста (по умолчанию — 80%, исходя из Raos (2021)), где $\gamma = 0.2$;
- N_ci — число рассматриваемых доверительных интервалов. Значение по умолчанию — 100. Для выполнения стандартного требования по мощности в 20% тогда необходимо различие для 20 интервалов;

- N_portf — число искусственных портфелей ссуд, по которым определяется один доверительный интервал из N_ci, в том числе определяется его верхний или нижний квантиль. Значение по умолчанию — 100;

- N_step — шаг перебора значений. По умолчанию использовалось значение в 10 единиц для $p1 = 0.10$ и 50 единиц для $p1 = 0.50$;

Для того чтобы в надзорной практике использовать результаты исследования, целесообразно убедиться, насколько меняются оценки минимального размера при изменениях в указанных параметрах. Обсудим это далее.

Рис. 5: Минимальный размер выборки растет с повышением уровня значимости (снижение α) и незначительно растет с ростом требуемой мощности теста (снижение γ)



Примечание. Расчеты авторов, подробности доступны в Приложении, см. таблицу 2.

Ключевыми параметрами в математической статистике являются уровень значимости и мощность теста. Поэтому калибровку результатов для них представим на рисунке 5 (подробные результаты доступны в таблице 2).

Видно, что увеличение требуемой мощности на 10 п.п. несущественно влияет на размер выборки, хотя в целом большей требуемой мощности $(1-\gamma)$ соответствует больший требуемый минимальный размер выборки. Уровень значимости в большей степени различает результаты. Требование неотвержения гипотезы с большей точностью на примерно 10 п.п. (с меньшим α: от 10 к 1%) ведет к почти двукратному росту минимально достаточного размера выборки.

В отличие от параметров значимости и мощности остальные параметры не меняют результатов. Изменение числа рассматриваемых портфелей N_portf и/или доверительных интервалов N_ci увеличивает только требуемое время для расчетов. Например, поиск для комбинации 100–100 требует менее 10 секунд, тогда как для 1000–1000 уже 6 минут. Снижение числа доверительных интервалов до 500 при сохранении числа портфелей на уровне 1 тыс. требует в 2 раза меньше времени, то есть 3 минуты.

При этом неточность (доля перекрывающихся доверительных интервалов) снижается с 20 до 5%. Из этого следует, что можно снизить шаг перебора N_step и получить более точное значение достаточной выборки. При сохранении шага перебора в отдельных случаях искомый размер выборки может варьироваться не более чем на одну цену деления, то есть на величину заданного шага перебора.

Сам шаг перебора определяет пределы округления искомого числа. В таблице 1 в Приложении для наивысших значений корреляции (7.5–7.5%) рассматривался шаг в 500 наблюдений для приемлемого времени поиска минимально достаточного размера выборки.

7. Выводы и обсуждение

Задача определения минимального размера выборки является типичной для математической статистики, включая ситуации, когда рассматривается интересующий показатель в виде доли (пропорции). Однако традиционно такая задача решалась в предположении отсутствия корреляции (резервов, дефолтов, нарушений — для сферы финансов). В настоящей работе впервые было показано, насколько большим должен быть минимальный размер выборки, когда имеет место корреляция дефолтов.

Представленное математико-статистическое решение тем не менее оставляет открытым ряд методологических вопросов, решение которых может позволить лучше учесть интересы и ожидания вовлеченных сторон, как проверяющих, так и проверяемых.

Такие вопросы относятся к следующим сферам:

1. Определение корреляции (дефолтов).

2. Пропорциональное регулирование.

3. Способ измерения недооценки:

    - по среднему или по средневзвешенному;

    - через разницу ставок резерва или через конечную величину резерва.

4. Способ корректировки: на среднее или на квантиль.

Прокомментируем перечисленные моменты.

7.1. Определение корреляции (дефолтов)

В формуле (8) было показано, как измерить корреляцию дефолтов по данным о доле дефолтов портфеля и ее разброса. Однако важно понимать, что для такого измерения нужно несколько срезов в разные моменты времени. Это можно обеспечить выборками разных (непересекающихся, неповторяющихся) кредитов на разные даты. В качестве альтернативы, хотя это менее предпочтительно, можно взять одну выборку кредитов, включая невозвратные, и по ним воспроизвести статус платежа-неплатежа на несколько дат; и уже для такого подпортфеля рассчитать доли дефолтов на каждую из дат (некритично, что непосредственный состав подпортфеля может со временем меняться; приведенная формула позволяет получить оценку корреляции дефолта и в такой ситуации, поскольку рассматривается доля для подпортфеля в целом).

Подчеркнем, что в настоящей работе изучено свойство корреляции событий. Термин *дефолты* (корреляция *дефолтов*) добавляли для наглядности представления только одного из возможных приложений выводов работы. Однако результаты применимы и к иным показателям, измеренным долями (в процентах), но необязательно связанным с дефолтами[2]. Например, выводы о требовании большей выборки при наличии корреляции применимы и к нарушениям. Корреляция между событиями таких нарушений может быть естественным образом вызвана едиными (систематическими) решениями руководства финансовой организации по соответствующим вопросам.

Здесь необходимо понимать, как корректно рассчитывать и применять показатель корреляции дефолтов[3]. Дело в том, что банк чаще меняет кредитную политику, чем, например, рейтинговое агентство с данными в разделе 3. Тогда у проверяющих есть два варианта. Во-первых, если после изменения кредитной политики прошло достаточно тактов времени для измерения корреляции дефолтов, то ее необходимо измерить только на периоде, однородном в терминах корреляции дефолтов (то есть после изменения кредитной политики). Во-вторых, если времени прошло недостаточно, то целесообразно применять подход из стресс-тестирования, а именно перенести на банк оценки корреляции дефолтов из сопоставимых сегментов иных банков или всей отрасли.

[2]Автор благодарит Е.Л. Румянцева (Департамент финансовой стабильности Банка России) за обращение внимания на обсуждаемый здесь момент.

[3]Автор благодарит А.Г. Морозова (Департамент исследований и прогнозирования Банка России) за обращение внимания на обсуждаемый здесь момент.

При указанных измерениях корреляции дефолтов полезно помнить, что сам показатель может изменяться во времени. Чаще всего расти в кризис и снижаться при экономическом подъеме. Впервые такой эффект для рынка акций зафиксировали в работе Longin and Solnik (2001). Поэтому в первом приближении предлагается использовать усредненный на однородном периоде времени показатель, в отсутствие достаточного окна данных конкретного банка брать консервативную оценку по отрасли для него.

7.2. Пропорциональное регулирование

Новации банковского регулирования, особенно после кризиса 2007–2009 гг., вынесли на международную повестку вопрос пропорционального регулирования. Его суть состоит в том, чтобы более сложные финансовые организации более тщательно проверялись, тогда как организации, меньшие по размеру или по сложности операций, рассматривались по более простой процедуре. Этот принцип нашел отражение как в выделении системно значимых организаций (СЗКО), так и в разработке требований к внутренним процедурам оценки достаточности капитала (ВПОДК).

Задача минимального размера выборки позволяет реализовать принцип пропорционального регулирования через управление параметром α. Как отмечалось выше, в двух указаниях (№ 4466-У и проекте) использованы разные уровни квантилей, но единые для всех организаций. Поэтому можно рекомендовать дифференцировать α по степени сложности и размеру организаций, а именно чем системно значимее организация или чем сложнее ее бизнес, тем ниже должен быть для нее параметр α, то есть *при прочих равных* для нее нужно рассматривать выборки большего размера.

7.3. Способ измерения недооценки

По среднему или по средневзвешенному

В Указании № 4466-У используется расчет среднего размера недооценки (нарушения), см. формулу (7). В проекте указания — средневзвешенное на объем ссуды, см. формулу (6). В принципе оба подхода имеют право на существование *при выполнении определенных предпосылок.*

С одной стороны, расчет средневзвешенного отклонения оправдан, если в генеральной совокупности имеет место неравномерное распределение ссуд по сумме. Правда, если такое имеет место, то возникают сомнения в однородности такого портфеля. Здесь же заметим, что в целом логика экстраполяции относится к содержательно подобным (однородным) ссудам. Например, долю нарушений по ссудам физическим лицам (ФЛ) неоправданно экстраполировать на юридических (ЮЛ), и наоборот. В части юридических экстраполяция уместна в рамках рассматриваемого бизнес-сегмента заемщиков (напомним про обсуждение критериев однородности в подразделе 1.2).

С другой стороны, если неравномерность распределения по размеру ссуд нас не беспокоит и таковая имеет место в генеральной совокупности, то прежде чем использовать расчет средневзвешенной величины, необходимо убедиться в репрезентативности данных. Иными словами, вначале необходимо сравнить распределения размеров ссуд в генеральной совокупности и в сформированной выборке (например, через метрики Колмогорова — Смирнова или Крамера — Мизеса). Если распределения статистически равны, то действительно уместно распространять средневзвешенную оценку на генеральную совокупность. Однако если распределения не равны, то такое распространение (перенос оценки) неоправданно. Будет требоваться отдельная корректировка, определение которой представляет предмет отдельной работы.

Поэтому с точки зрения практики более оправданным видится применение среднего отклонения, как в Указании № 4466-У.

Через разницу ставок резерва или через конечную величину резерва

Логика Указания № 4466-У и проекта состоит в том, что проверяется нулевая гипотеза о равенстве нулю показателя среднего отклонения (например, равно ли 2% статистически нулю). Однако на самом деле проверяющий желает убедиться в том, каков истинный размер резерва. Иными словами, он проверяет другую гипотезу о том, равна ли ставка резерва банка (например, 5%) сумме, получаемой при сложении этой ставки (5%) и выявленного процента доначисления (2%), то есть в примере проверяется, равно ли $7\% = (2\% + 5\%)$ статистически 5%.

Например, проверяющий мог выявить недооценку на 10% при ставке резерва банка в 50%. Логика существующего подхода состоит в том, чтобы проверять гипотезу о равенстве нулю величины недооценки в 10%. Однако, по сути, проверяющий смотрит, можно ли утверждать, что значения 50% и $(10 + 50) = 60\%$ равны. Со стороны может возникнуть желание сказать, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Тем не менее она меняется в нашей задаче. Например, для проверки первого типа (то есть при малом — нулевом — значении оценки резерва банком) в предположении отсутствия корреляции дефолтов требуется 200 наблюдений, см. таблицу 1. При этом для проверки такой же абсолютной разницы, но для большего значения оценки банка (50%), требуется в 2 раза больше наблюдений (450 наблюдений).

Таким образом, для корректного вывода можно рекомендовать сравнивать не величину выявленного нарушения с нулем, а величину текущего резерва и резерва с учетом дополнительного резерва. Содержательно для практики проверки это означает, что минимальные выборки должны быть примерно в 2 раза больше.

7.4. Способ корректировки

В проекте Указания Банк России (2017a) предлагается доформировать резервы по генеральной совокупности по значению правого края (квантиля) доверительного интервала около доли недоформированного резерва по сформированной выборке. Такое предложение, вероятно, продиктовано соображениями консервативности.

Однако уместно вспомнить, что доверительный интервал существует не только для случайной величины, отражающей недоформированный резерв, но и для базовой оценки резервов. Собственно, такая же логика заложена в модели Vasicek (1987, 2002) в подходе внутренних рейтингов (ПВР). Среднее (математическое ожидание) распределения доли убытков называется *ожидаемыми потерями* и принимается как величина резерва (вычитается из числителя норматива достаточности капитала), тогда как разница между квантилем и средним именуется *непредвиденными потерями* и добавляется в величину взвешенных по риску активов (АВР, RWA) (в знаменатель норматива).

Поэтому целесообразно для перспективного будущего исследования продумать, необходимо ли при доформировании резервов *методом экстраполяции* для организаций, имеющих ограничение в виде норматива достаточности капитала, рекомендуемую к доформированию величину аналогичным образом делить на ожидаемую и непредвиденные компоненты, и, если целесообразно, то каким образом эти компонеты учесть в нормативе достаточности капитала.

A. Приложения

А.1. Выдержка из стандарта Минфин России (2021)

Международный стандарт аудита 530 «Аудиторская выборка»:

Экстраполяция искажений

14. При проведении детального тестирования аудитор обязан экстраполировать искажения, обнаруженные в выборке, на всю генеральную совокупность (см. пункты A18–A20).

<...>

Экстраполяция искажений (см. пункт 14)

A18. Чтобы получить более общее представление о масштабах искажений, аудитор обязан экстраполировать искажения на всю генеральную совокупность, однако для определения величины искажения, которую необходимо отразить, этого может оказаться недостаточно.

A19. Если будет установлено, что искажение представляет собой аномалию, его можно исключить из экстраполяции искажений на генеральную совокупность. При этом при экстраполяции искажений, не представляющих собой аномалии, необходимо учитывать влияние всех вышеуказанных искажений в случае, если они не будут устранены.

A20. При выполнении тестирования средств контроля явная необходимость в экстраполяции отклонений отсутствует, поскольку норма отклонения в выборке также представляет собой норму отклонения, экстраполированную на всю генеральную совокупность. В МСА 330[3] приводятся указания на случай выявления отклонений от средств контроля, на которые аудитор планирует опираться.

A.2. Подробное описание логики экстраполяции резервов в отсутствие корреляции дефолтов из Указания № 4466-У Банк России (2017b) и проекта Банк России (2017a)

$$DRezGr = \overline{DRezK} \cdot GrC, \tag{11}$$

где $DRezGr$ — «размер доначисления резерва группы ссуд» (Банк России, 2017b, п. 2.3.16); $\overline{DRezK}$ — скорректированная величина резерва, связанная с недостаточностью объема выборки (Банк России, 2017b, п. 2.3.15);
GrC — «совокупная сумма основного долга соответствующей группы ссуд в рублях».

$$\overline{DRezK} = (1 + \Pi) \cdot \overline{DRez}, \tag{12}$$

где Π — «поправка среднего размера (в процентах) доначисления резерва» (Банк России, 2017b, п. 2.3.15); $\overline{DRez}$ — «средний размер (в процентах) доначисления резерва по ссудам выборки» (Банк России, 2017b, п. 2.3.14).

$$\Pi = \frac{1.96}{\overline{DRez}} \cdot \frac{S_{DRez}}{\sqrt{n}}, \tag{13}$$

где S_{DRez} — «стандартное отклонение индивидуального размера (в процентах) доначисления резерва для ссуд выборки» (Банк России, 2017b, п. 2.3.9.2). Предполагается отсечение 5% с двух сторон.

$$\overline{DRez} = \frac{\sum_{i=1}^{n} DRez_i \cdot SZ_i}{\sum_{i=1}^{n} SZ_i}, \tag{14}$$

где $DRez_i$ — итоговый размер (в процентах) доначисления резерва по i-ой ссуде с учетом всех выявленных по ней нарушений (Банк России, 2017b, п. 2.3.13); SZ_i — «остаток ссудной задолженности на дату оценки».

$$\Pi_{DRez} = 1.645 \cdot \frac{S_{\overline{DRez}}}{\overline{DRez}}, \tag{15}$$

где Π_{DRez} — «поправка среднего размера (в процентах) доначисления резервов по подвыборке» (Банк России, 2017a, п. 4.10). Предполагается отсечение 10% с двух сторон.

Логика формул (13), (15) соответствует формуле (2):

$$S_{\overline{DRez}} = \sqrt{\frac{S^2_{DRez}}{n_1} \cdot (1 - \frac{n_1}{N})}, \tag{16}$$

где OD_i — «сумма основного долга по i-ой ссуде на дату оценки» (Банк России, 2017a, п. 4.9).

$$S_D = \sqrt{\frac{D \cdot (1 - D)}{n} \cdot (1 - \frac{n}{N})}, \tag{17}$$

где n — «количество ссуд в выборке» (Банк России, 2017a, п. 4.6); N — «количество ссуд в группе портфелей»; $D = \frac{n_1}{n}$ — «количество ссуд в группе портфелей» (Банк России, 2017a, п. 4.5), где n_1 — «количество ссуд в подвыборке».

A.3. Подробные оценки минимального размера выборки

Таблица 1: Минимальный размер выборки растет с ростом корреляции дефолтов в большей степени для одинакового прироста в выборке с большей оценкой резерва (PD_sample), чем с меньшей (PD_true)

$PD\_true = 0.10, PD\_sample = 0.20$

Def.cor., %	0.0	2.5	5.0	7.5
0.0	200	220	230	260
2.5	230	250	260	300
5.0	380	420	550	640
7.5	1070	1370	2100	3500

$PD\_true = 0.10, PD\_sample = 0.15$

Def.cor., %	0.0	2.5	5.0	7.5
0.0	710	770		
2.5	1210	1550		

$PD\_true = 0.50, PD\_sample = 0.60$

Def.cor., %	0.0	2.5	5.0	7.5
0.0	450	500	650	1100
2.5	500	550	850	1550
5.0	600	750	1300	3000
7.5	850	1250	2700	9500

$PD\_true = 0.50, PD\_sample = 0.55$

Def.cor., %	0.0	2.5	5.0	7.5
0.0	1600	3000		
2.5	3000	5500		

Таблица 2: Минимальный размер выборки растет с повышением уровня значимости (снижение α) и незначительно растет с ростом требуемой мощности теста (снижение γ)

			α, %		
			10	5	1
No default correlation					
γ, %	30	Min set	150	190	290
		Breach, %	17	20	28
		time, sec	4	5	8
	20	Min set	150	210	310
		Breach, %	18	15	15
		time, sec	4	5	8
	10	Min set	160	220	350
		Breach, %	8	10	9
		time, sec	4	6	10
Default correlation 2.5%					
γ, %	30	Min set	160	220	390
		Breach, %	22	24	24
		time, sec	4	6	12
	20	Min set	170	240	420
		Breach, %	14	16	19
		time, sec	4	7	14
	10	Min set	190	250	490
		Breach, %	5	6	9
		time, sec	5	7	17

Примечание. Min set — минимальный размер выборки; Breach, % — процент доверительных интервалов (единица минус мощность теста); time, sec — потребовавшееся время для поиска достаточного минимального размера выборки

A.4. Код в R

```
#========================================
# simulating CI for proportion (EXTRAPOLATION ) #
#========================================



#///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
# ========== PARAMETERS (CAN BE CHANGED) ===========
#///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

# ========== LOAN PORTFOLIO PARAMETERS ===========

# sample size search
N_start <-     000
N_step <-     500

#----------------------------

# number of portfolios
```

```
N_portf <- 100

# provision rates (EL, PD, DR)
PD_sample      <-       0.55   # e.g., industry average # CI_low
PD_true      <-       0.50   # e.g., reported by bank # CI_up

# Default correlations
Rho_sample      <-       0.05   # e.g., industry average
Rho_true      <-       0.05   # e.g., reported by bank

#========================= CI PARAMETERS ===========
# number of CIs
N_ci  <- 100

# ========== GENERAL PARAMETERS ===========
# statistical significance level (for CI)
alpha   <- 0.05

# statistical power (usually 80% is used, hence gamma is 1-0.8)
gamma <- 0.20

# ===== OTHER PARAMETERS (assume no changes to be done) ======
# values inputted by default when creating an object
input  <- 0
trials       <- 1
start_count  <- 1
two     <- 2

#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
#============ MAIN CODE (NO CHANGES) ==================
#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
##############################################
start.time <- Sys.time()

#========= generate auxiliary variables =============

two_sided <- alpha / two

sign_level1 <-             two_sided
sign_level2 <- start_count - two_sided

#=================================
# initial values

N_loans <- N_start

Prop_breach <- 1

#------------------------
# cycle to search the optimal sample size
#------------------------

# vector with DR realisations per one (single) CI
```

```
CI_single_sample    <- rep(input, N_portf )
CI_single_true       <- rep(input, N_portf )

#===========================================

 while( Prop_breach > gamma    ) {


#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

N_loans <- N_loans + N_step

# vector with lower CI boundaries
CI_low    <- rep(input, N_ci )
CI_up    <- rep(input, N_ci )

# vector with mean DRs
DR_mean_sample    <- rep(input, N_ci )
DR_mean_true     <- rep(input, N_ci )

#------------------------
#------------------------


# cycle to fill in lower CI boundary
for (j in start_count:N_ci) {



#------------------------
# cycle to fill in DR values per CI
for (k in start_count:N_portf) {



#------------------------

# individual factor
Y1      <- rep(input, N_loans)
Y2      <- rep(input, N_loans)

# correlation parameter to simulate dependent outcomes
U1  <- rep(input, N_loans)
U2  <- rep(input, N_loans)

# outcome (default / non-default)
X1 <- rep(input, N_loans)
X2 <- rep(input, N_loans)

#------------------------

#=================================
# generate a single SAMPLE loan portfolio (single DR value)
```

```
# assumed DR (EL) value, or industry typical
# expect it to be higher than the true value reported by bank


#------ traditional Gaussian (bell shaped) distribution (NO correlation) --
# Defaults <- rbinom(N_loans, trials, PD_sample)
# DR         <- mean(Defaults)

#--------------------------------------------
#------ Lunn, Davies (1997) model
#--------------------------------------------

# common (systemic) factor
CF01 <- rbinom(trials, trials, PD_sample)
CF1    <- rep(CF01, N_loans)

# individual (idiosyncratic) factor
 Y1 <- rbinom(N_loans, trials, PD_sample)

# default correlation
 U1 <- rbinom(N_loans, trials, Rho_sample)
#--------------------------------
# final outcome (D / ND status)
  X1   <- U1 * CF1  + (1 - U1) * Y1

#--------------------------------

# Def <- sum(X1)

CI_single_sample[k]   <- sum(X1) / N_loans

#================================
# generate a single TRUE loan portfolio (single DR value)
# reported by bank


#------ traditional Gaussian (bell shaped) distribution (NO correlation) --
# Defaults <- rbinom(N_loans, trials, PD_true)
# DR <- mean(Defaults)

#--------------------------------------------
#------ Lunn, Davies (1997) model
#--------------------------------------------

# common (systemic) factor
CF02 <- rbinom(trials, trials, PD_true)
CF2    <- rep(CF02, N_loans)

# individual (idiosyncratic) factor
 Y2 <- rbinom(N_loans, trials, PD_true)

# default correlation
 U2 <- rbinom(N_loans, trials, Rho_true)
```

```
#--------------------------------
# final outcome (D / ND status)
  X2   <- U2 * CF2  + (1 - U2) * Y2
#--------------------------------

#Def <- sum(X2)

CI_single_true[k]  <- sum(X2) / N_loans


#==================================

}

#------------------------


# lower boundary of SAMPLE CI
CI_low[j]    <- quantile(CI_single_sample, sign_level1 )
DR_mean_sample[j]  <-     mean(CI_single_sample)

# upper boundary of TRUE CI
CI_up[j]     <- quantile(CI_single_true, sign_level2 )
DR_mean_true[j]  <-     mean(CI_single_true)


####################
}
#------------------------
#------------------------

# hist(CI_low)

#==============================
# count POWER (number of CI lower boundary exceeding the point est.)

breach <- ( CI_low < CI_up )

   N_breach <- sum(breach)
# N_breach

# portion of breaches (want it to be low than gamma parameter)
Prop_breach <- N_breach / N_ci

#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

print(N_loans)



}
```

```
#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
#============ OUTPUT ===================
#/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

######################
df <- data.frame(var = c(rep('CI_low', N_ci), rep('CI_up', N_ci) ), value = c(CI_low, CI_up)

#plot multiple histograms
ggplot(df, aes(x=value, fill=var)) +  geom_histogram( color='#e9ecef', alpha=0.6, position='i



###############################

end.time   <- Sys.time()
time.taken <- end.time - start.time

######################

N_loans
Prop_breach
time.taken

#=========================================
```

Список литературы

AICPA (1999). Audit sampling (1999): Audit and accounting guide. American Institute of Certified Public Accountants. Audit Sampling Task Force. Industry Developments and Alerts. 334. URL: https://egrove.olemiss.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1333&context=aicpa_indev#page9, open access, accessed on Feb. 7, 2024.

Bush, S. (2015). Sample size determination for logistic regression: A simulation study. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 44(2):360–373. https://doi.org/10.1080/03610918.2013.777458, restricted access.

Demidenko, E. (2007). Sample size determination for logistic regression revisited. Statistics in Medicine, 26(18):3385–3397. https://doi.org/10.1002/sim.2771, restricted access.

Demidenko, E. (2016). The p-value you can't buy. The American Statistician, 70(1):33–38. https://doi.org/10.1080/00031305.2015.1069760, open access, accessed on Feb. 7, 2024.

Hogg, R. V., Tanis, E. A., and Zimmerman, D. L. (2015). Probability and Statistical Inference. Pearson, 9th edition. https://www.amazon.com/Probability-Statistical-Inference-Robert-Hogg/dp/0321923278, restricted access; https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/677_fr37hij.pdf, open access, accessed on Feb. 15, 2024.

Kruppa, J., Lepenies, B., and Jung, K. (2018). A genetic algorithm for simulating correlated binary data from biomedical research. Computers in Biology and Medicine, 92:1–8. https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2017.10.023, restricted access.

Kulinskaya, E., Morgenthaler, S., and Staudte, R. G. (2008). Meta Analysis. A Guide to Calibrating and Combining Statistical Evidence. Wiley. https://www.wiley.com/en-us/Meta+Analysis%3A+A+Guide+to+Calibrating+and+Combining+Statistical+Evidence-p-9780470985526, restricted access.

Lachin, J. M. (2011). Biostatistical methods. The assessment of relative risks. Wiley, 2nd edition. https://www.doi.org/10.1002/9780470317051, restricted access.

Longin, F. and Solnik, B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. Journal of Finance, LVI:649–676. https://doi.org/10.1111/0022-1082.00340, restricted access.

Lunn, A. D. and Davies, S. J. (1998). A note on generating correlated binary variables. Biometrika, 85:487–490. https://www.jstor.org/stable/2337376, restricted access.

NAO (2001). A practical guide to sampling. national Audit Office; URL: https://www.nao.org.uk/wp-content/uploads/2001/06/SamplingGuide.pdf, open access, accessed on Feb. 7, 2024.

Nigrini, M. J. (2012). Benford's Law: Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection. John Wiley and Sons, New York. https://www.wiley.com/en-us/Benford%27s+Law%3A+Applications+for+Forensic+Accounting%2C+Auditing%2C+and+Fraud+Detection-p-9781118152850, restricted access.

Raos (2021). Chapter 16. Design and sample size decisions. https://statmodeling.stat.columbia.edu/wp-content/uploads/2021/01/raos_chapter16.pdf, open access, accessed on Jan. 10, 2024.

S&P Global Ratings (2019). 2018 annual global corporate default and rating transition study. URL: https://www.spratings.com/documents/20184/774196/2018AnnualGlobalCorpo-rateDefaultAndRatingTransitionStudy.pdf, limited access (registration is required), accessed on December 20, 2019.

Stewart, T. R. (2012). Technical notes on the AICPA audit guide audit sampling. https://us.aicpa.org/content/dam/aicpa/publications/accountingauditing/keytopics/downloadabledocuments/sampling_guide_technical_notes.pdf, open access, accessed on Feb. 7, 2024.

UHBristol (2009). How to: Set an audit sample & plan your data collection. University Hospitals Bristol Clinical Audit Team – Version 3. URL: https://uhbristol.nhs.uk/files/nhs-ubht/5%20How%20To%20Sample%20Data%20Collection%20and%20Form%20v3.pdf, open access, accessed on Feb. 7, 2024.

Vasicek, O. A. (1987). Probability of loss on loan portfolio. https://www.moodysanalytics.com/-/media/whitepaper/before-2011/02-12-87-probability-of-loss-on-loan-portfolio.pdf.

Vasicek, O. A. (2002). The distribution of loan portfolio value. https://www.bankofgreece.gr/MediaAttachments/Vasicek.pdf; open access.

Банк России (2017a). Проект Указания Банка России “О порядке оценки Банком России корректности формирования резервов по портфелям однородных ссуд методом экстраполяции”. https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71504728/, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Банк России (2017b). Указание от 12.07.2017 № 4466-У "О методике проводимой Банком России оценки достаточности имущества банка для осуществления урегулирования его обязательств". https://www.cbr.ru/Queries/UniDbQuery/File/90134/349, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Давыдов, А. А. (1990). Репрезентативность выборки. Консультации, 1:115–121. URL: https://www.hse.ru/data/2010/09/08/1221348941/Р¥РөРўСЌР¥Р«Рў%20РгРҳР»СЃРҳРчРҳР„СЂРөСЂРчРўР„Р«СҒСЂСӔ%20РўСЌРҫР«СЃРәРч.pdf, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Зверев, Е. (2018). МСА 530 «Аудиторская выборка»: способы отбора элементов совокупности. МСФО и МСА в кредитной организации, 69(3):37–46. URL: https://www.iia-ru.ru/inner_auditor/publications/articles/analitika-i-rabota-s-dannymi/msa-530-auditorskaya-vyborka-sposoby-otbora-elemen/, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Зверев, Е. and Никифоров, А. (2019). Экспертная выборка: формирование для большой совокупности. МСФО и МСА в кредитной организации, 72(2):68–74. URL: https://www.iia-ru.ru/inner_auditor/publications/articles/analitika-i-rabota-s-dannymi/ekspertnaya-vyborka-formirovanie-dlya-bolshoy-sovo/, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Минфин России (2021). Международный стандарт аудита 530 «Аудиторская выборка». Введен в действие на территории Российской Федерации приказом Минфина России от 09.01.2019 № 2н; https://minfin.gov.ru/ru/document/?id_4=116595, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Новиков, С. В. (2001). Стратифицированная выборка в социологических исследованиях. Вопросы методологии и методики исследования, 1:1–5. URL: https://www.hse.ru/data/2010/09/08/1221348961/Р№Р«РўРчРәР«Рў%20РғСЂСЃРөСЂРчСҺРчСЗРчСЃР«РўРөР„Р„РөСЅ%20РўСЌРҫР«СЃРәРө%20Рў%20СҒР«СЗРчР«РњР«РүРчСЉРҳСҒРәРчСЖ%20РчСҒСҒРњРҳР¥Р«РўРөР„РчСЅСЖ.pdf, открытый доступ, открыто 7 фев. 2024 г.

Поздышев, В. А. (2017). Банковское регулирование в 2016–2017 годах: основные изменения и перспективы развития. Деньги и кредит, 1:9–17. URL: https://rjmf.econs.online/archive/2017/1/bankovskoe-regulirovanie-v-2016-2017-godakh-osnovnye-izmeneniya-i-perspektivy-razvitiya/, открытый доступ, открыто 13 фев. 2024 г.